

Résumé de Cours :logarithme népérien

PROF: ATMANI NAJIB

La fonction logarithme népérien

2BAC SM

La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien notée $\ln$ est l'unique fonction, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et Vérifiant $\ln 1 = 0$

et pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Il est continu et strictement croissant sur $]0, +\infty[$.

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels : $\forall x > 0$; $\forall y > 0$; $\forall r \in \mathbb{Q}$

$$1) \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \quad 2) x \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y$$

$$3) \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad 4) \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$5) \ln(x \times y) = \ln x + \ln y \quad 6) e \approx 2,71828 \dots \text{ et } \ln(e) = 1$$

$$7) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad 8) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$9) \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad 10) \ln(x^r) = r \ln x$$

$$11) \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 12) (e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$$

$$13) e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et } \forall y > 0$$

(Limites usuelles)

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad (\text{où } r \in \mathbb{Q}_*^+)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0 \quad (\text{où } r \in \mathbb{Q}_*^+)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Dérivée et primitives de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

1) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction : $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I

$$\text{et } (\forall x \in I) \quad (f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)})$$

2) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont

les fonctions ; $F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

Soit $(a > 0)$ et $(a \neq 1)$

On note $\log_a$ la fonction logarithmique de base a

définie sur $]0, +\infty[$ par : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad (\log_a = \frac{\ln x}{\ln a})$

$\forall x > 0$; $\forall y > 0$; $\forall r \in \mathbb{Q}$

$$1) \log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y \quad 2) \log_a(1/x) = -\log_a x$$

$$3) \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \quad 4) \log_a(\sqrt{x}) = (1/2) \log_a x$$

$$5) \log_a(x^r) = r \log_a x$$

$$6) \log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

$\forall x \in]0, +\infty[; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$ donc La fonction $\log_a$

est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$

$$1) (\forall x > 0)(\forall y > 0) (\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$$

$$2) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$$

$$3) \log_a \text{ strictement croissante si } (a > 1)$$

$\log_a$ strictement décroissante si $(0 < a < 1)$

Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par **log** et $(\forall x \in]0, +\infty[)$

$(\log x = \frac{\ln x}{\ln 10})$ et on a : $\log(10) = 1$

$$1) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$$

$$2) (\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(10^r) = r) \quad 3) \log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

