

# FONCTIONS LOGARITHMIQUES

## I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

### 1) Existence :

#### Activité :

Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction  $f$  non nulle telle que :

$$(\Sigma) \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[ \text{ (1)} \\ (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) (f(xy) = f(x) + f(y)) \text{ (2)} \end{cases}$$

1- Déterminons  $f(1)$  :

D'après (2) on prenant  $x = y = 1$  on obtient :  $f(1) = 2f(1)$  donc  $f(1) = 0$ .

2- Déterminons l'existence d'un réel  $k$  tel que :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) \left( f'(x) = \frac{k}{x} \right)$ .

Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $]0, +\infty[$  on pose :

$g_x(y) = f(xy)$  et  $h_x(y) = f(x) + f(y)$  ; on a :  $g_x$  et  $h_x$  sont dérivable sur  $]0, +\infty[$  et :

$(\forall y \in ]0, +\infty[) (g'_x(y) = xf'(xy) \text{ et } h'_x(y) = f'(y))$  ( $f(x)$  es une constante pour  $y$ )

et puis que :  $(\forall y \in ]0, +\infty[) (g'_x(y) = h'_x(y))$  alors :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) (xf'(xy) = f'(y)) \text{ pour } y = 1 \text{ on trouve : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \left( f'(x) = \frac{f'(1)}{x} \right)$$

Donc la fonction qui vérifie la condition  $(\Sigma)$  est la fonction primitive de la fonction  $\frac{f'(1)}{x}$  et qui s'annule en 1

*Inversement :*

Considérons la fonction primitive de  $x \mapsto \frac{k}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annule en 1 ; montrons que  $f$  vérifie  $(\Sigma)$

On a :  $f$  est dérivable  $]0, +\infty[$  (Définition de la fonction primitive)

Considérons les fonctions :  $u_y(x) = f(xy)$  et  $v_y(x) = f(x) + f(y)$  on a  $u_y$  et  $v_y$  sont dérivable sur  $]0, +\infty[$  :

$\forall x > 0; \forall y > 0 : u'_y(x) = yf'(xy)$  et  $v'_y(x) = f'(x)$  et on a :

$$u'_y(x) = yf'(xy) = y \times \frac{k}{xy} = \frac{k}{x} = f'(x) = v'_y(x) \text{ donc :}$$

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad v_y(x) = u_y(x) + c$$

Pour  $x = y = 1$  on aura :  $v(1) = u(1) + c$  et puisque  $u(1) = v(1)$  alors  $c = 0$ . d'où :

$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad v_y(x) = u_y(x)$  c-à-dire  $\forall x > 0; \forall y > 0$  on a :  $f(xy) = f(x) + f(y)$ .

Propriété :

Les fonctions non nulles qui vérifient  $(\Sigma)$  sont les fonctions primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{k}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annulent en 1.

### 2) Fonction logarithme Népérienne

#### 2.1 Définition et propriétés algébrique :

## Définition :

La fonction **logarithme népérien** est la fonction primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annule en 1 ; on la note par  $\ln$ .

## Conséquences immédiates :

- $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$
- $f(x) = \ln(u(x))$  est définie si et seulement si  $u(x) > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(x \in ]0, +\infty[) (\ln'(x) = \frac{1}{x})$ .

## Monotonie :

On a :  $(x \in ]0, +\infty[) (\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0)$  donc la fonction  $\ln$  est **strictement croissante sur  $]0, +\infty[$**

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

## Applications :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ :

- ❶ L'équation :  $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x)$
- ❷ L'inéquation :  $\ln(x^2 - 1) \leq \ln(2 - x)$ .

## La propriété caractéristique :

$(\forall x > 0; \forall y > 0) (\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y))$

## Règles de calculs :

- $(\forall x > 0) (\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x))$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0) (\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y))$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q}) (\ln(x^r) = r \ln(x))$

## Preuve :

(En exercice)

**Exercice :** On pose  $\alpha = \ln(2)$  et  $\beta = \ln(3)$

Calculer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  les réels suivants :  $a = \sqrt[7]{32}$  ;  $b = \frac{\sqrt[3]{24}}{9\sqrt{8}}$

## 2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction  $\ln$  on peut conclure que :

$\ln$  est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

✓ Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ .

Soit  $A$  un réel strictement positif. Comme la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et que  $\ln(1) = 0$  alors :  $\ln(2)$  est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient :  $\frac{A}{\ln 2}$  est un réel strictement positif.

On appelle  $n$  le plus petit entier naturel tel que :  $n \geq \frac{A}{\ln 2}$  (il suffit de prendre  $n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$ )

On multiplie par  $\ln 2$  qui est positif on aura :  $n \ln 2 \geq A \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq A$

Comme  $\ln$  est une fonction croissante, alors pour tout  $x$  tel que  $x \geq 2^n$  nous avons :  $\ln x \geq \ln 2^n \geq A$

Donc  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow \ln x > A) : (B = \ln 2^n \text{ où } E \left( \frac{A}{\ln 2} \right) + 1)$  Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

✓ Déterminons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ .

On a : On pose  $t = \frac{1}{x}$  on a :  $x = \frac{1}{t}$  et  $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty \text{ finalement : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

La droite  $(\Delta) : x = 0$  est une asymptote verticale à la courbe  $C_{\ln}$

✓ Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Exercice :

1- En utilisant le T.A.F de la fonction  $\ln$  sur l'intervalle  $[1, \sqrt{x}]$  ; montrer que :  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$ .

2- En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

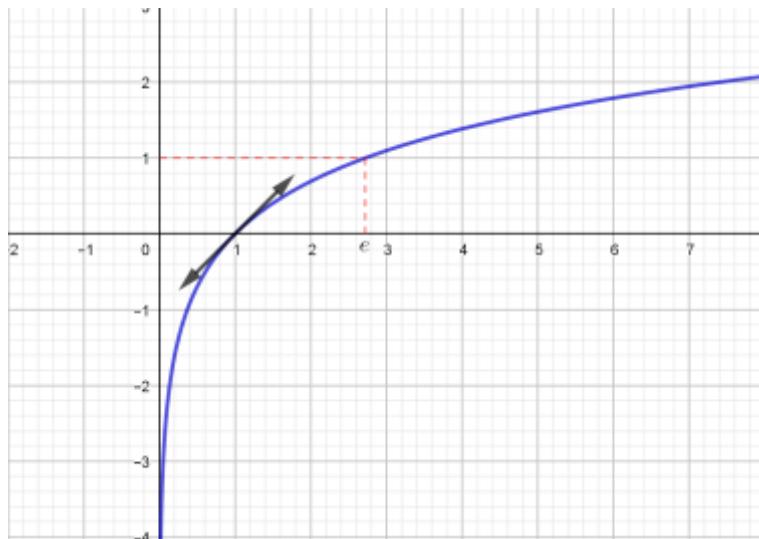
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

La courbe  $C_{\ln}$  admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$

✓ Le nombre  $e$  :

La fonction  $\ln$  est continue strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et  $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ , donc le réel 1 a un antécédent noté  $e$  (le nombre népérien)  $\ln(e) = 1$

✓ La courbe  $C_{\ln}$  a une tangente en  $A(1,0)$  ( $T$ ):  $y = x - 1$



|          |           |   |     |           |
|----------|-----------|---|-----|-----------|
| $x$      | 0         | 1 | $e$ | $+\infty$ |
| $\ln' x$ |           |   | +   |           |
| $\ln x$  | $-\infty$ | 0 | 1   | $+\infty$ |

### 3) Dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

## Théorème :

Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et **strictement positive sur  $I$**  alors la fonction  $f(x) = \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et  $(\forall x \in I) \left( f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$

## Exercice :

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction :  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2x-3}{1+\sqrt{x^2-1}}\right)$

## Corolaire :

Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $f(x) = \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$  et  $(\forall x \in I) \left( f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$

## Preuve :

(en exercice)

Etudier deux cas  $u(x) > 0$  sur  $I$  et  $u(x) < 0$  sur  $I$ .

## Propriété :

Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors les fonctions primitives de la fonction  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  sont les fonctions  $F(x) = \ln(|u(x)|) + C^{te}$

## Applications :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{7x+3}{2x^2+5}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad (\text{Essayer d'écrire } g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \text{ où } a \text{ et } b \text{ des réels à déterminer}).$$

$$h(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$$

$$k(x) = \tan x$$

$$u(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$v(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$$

$$t(x) = \frac{1}{\sin 2x}$$

## 4) Limites référentielles :

### Propriété :

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty & \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*) \\ \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*) & \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 & \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{array}$$

### Preuves :

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ voir exercice précédent})$$

$$\textcircled{4} \text{ on pose } t = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^n} \ln \left( \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^n} = 0$$

⑤ La fonction  $\ln$  étant dérivable en 1 alors :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$  ( $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$ )

⑥ On pose :  $t = x + 1$  et on applique ⑤.

## Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{3x^2+x}$

②  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(5x+1)}$

③  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x^2-5x+3)}{\ln(5x-9)}$

④  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{\ln(x^2+3x+2)}$

⑤  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^2 - 2x - 2) \ln(1-x)$

⑥  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2} \ln(x + \sqrt{x})$

⑦  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + x) - \frac{1}{3} \ln(x^6 + 3x^4)$

⑧  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^4+x+1)}{\ln(x+1)}$

⑨  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x^2}{\sqrt[6]{x}}$

## II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE $a$

### 1) Définition

Définition :

Soit  $a$  un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par  $\text{Log}_a$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$(\forall x \in ]0, +\infty[) \left( \text{Log}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \right)$  S'appelle : **la fonction logarithmique de base  $a$**

Exemple :

Pour :  $a = e$  on aura :  $\text{Log}_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

### 2) Propriétés et règles de calcul :

Propriété caractéristique

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction  $\ln$  restent valables pour la fonction  $\text{Log}_a$ .

- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y))$
- $(\forall x > 0) \left( \text{Log}_a \left( \frac{1}{x} \right) = -\text{Log}_a(x) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0) \left( \text{Log}_a \left( \frac{x}{y} \right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\text{Log}_a(x^r) = r\text{Log}_a(x))$

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction  $\text{Log}_a$  et les propriétés de la fonction  $\ln$

Propriétés :

- La fonction  $\text{Log}_a$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\text{Log}_a(x) = \text{Log}_a(y) \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\text{Log}_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$

Propriété :

La fonction  $\text{Log}_a$  est continue dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(\forall x \in ]0, +\infty[) \left( \text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} \right)$

Preuve : (En exercice)

## Etude et représentation de $\log_a$

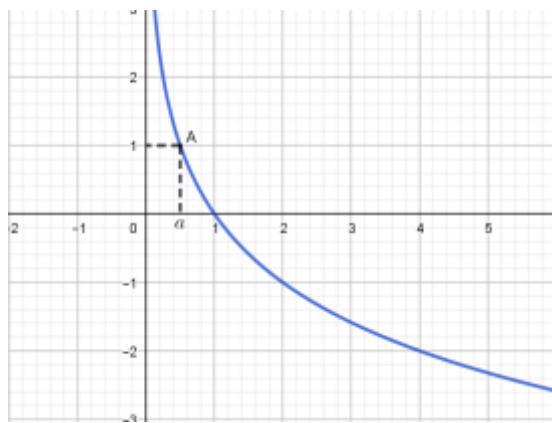
Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1 :

- La fonction  $\log_a$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .
- La fonction  $\log_a$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et :  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$   $(\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a})$  donc le signe de  $\log'_a$  dépend du signe de  $\ln a$ , ce qui nous amène à discuter deux cas :  $\ln a > 0$  ;  $\ln a < 0$

Si  $a \in ]0, 1[$  alors  $\ln a < 0$

Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$   $(\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0)$ .

| $x$          | 0         | $a$ | 1 | $+\infty$ |
|--------------|-----------|-----|---|-----------|
| $\log'_a(x)$ | $+\infty$ |     | - | -         |
| $\log_a(x)$  | $+\infty$ | 1   | 0 | $-\infty$ |

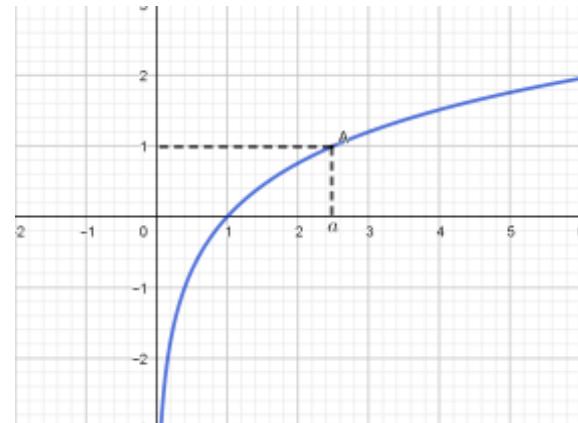


Courbe de la fonction  $\log_{\frac{1}{2}}$

Si  $a \in ]1, +\infty[$  alors  $\ln a > 0$

Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$   $(\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0)$ .

| $x$          | 0         | 1 | $a$ | $+\infty$ |
|--------------|-----------|---|-----|-----------|
| $\log'_a(x)$ |           | + | +   |           |
| $\log_a(x)$  | $-\infty$ | 0 | 1   | $+\infty$ |



Courbe de la fonction  $\log_5$

## 3) Cas particulier $a = 10$ ; logarithme décimal :

Définition :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle **la fonction logarithmique décimal** et se note par  $\log$

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log x = \frac{\ln x}{\ln 10})$$

Propriétés :

- $\log(10) = 1$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$
- $(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(10^r) = r)$
- $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

## 4) Applications

Exercice 1 :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x)$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\log_2(x) > \log_x(2)$

**Exercice 4 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 1$
3. Résoudre l'inéquation  $f(x) \leq 1$
4. Etudier la dérивabilité de la fonction  $f$  à gauche de  $e$
5. Etudier les variations de  $f$  et en deduire que  $f$  est une bijection de  $D_f$  vers un intervalle  $J$ .
6. Construire dans le même repère  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$ .

**Exercice 5 :** Considérons la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$
2. a) Montrer que la fonction  $g$  admet un prolongement par continuité en 0 noté  $\bar{g}$   
b) Etudier la dérивabilité de  $\bar{g}$  en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $+\infty$  et en  $-1$  à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$
5. Etudier les branches infinies de la courbe  $C_g$ .
6. Construire la courbe  $C_g$