

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

1) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Existence :

Activité :

Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction f non nulle telle que :

$$(\Sigma) \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[& (1) \\ (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) (f(xy) = f(x) + f(y)) & (2) \end{cases}$$

1- Déterminons $f(1)$:

D'après (2) on prenant $x = y = 1$ on obtient : $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

2- Déterminons l'existence d'un réel k tel que : $(\forall x \in]0, +\infty[) (f'(x) = \frac{k}{x})$.

Pour tous x et y dans $]0, +\infty[$ on pose :

$g_x(y) = f(xy)$ et $h_x(y) = f(x) + f(y)$; on a : g_x et h_x sont dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$(\forall y \in]0, +\infty[) (g'_x(y) = xf'(xy) \text{ et } h'_x(y) = f'(y))$ ($f(x)$ est une constante pour y)

et puis que : $(\forall y \in]0, +\infty[) (g'_x(y) = h'_x(y))$ alors :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) (xf'(xy) = f'(y)) \text{ pour } y = 1 \text{ on trouve : } (\forall x \in]0, +\infty[) (f'(x) = \frac{f'(1)}{x})$$

Donc la fonction qui vérifie la condition (Σ) est la fonction primitive de la fonction $\frac{f'(1)}{x}$ et qui s'annule en 1

Inversement :

Considérons la fonction primitive de $x \mapsto \frac{k}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1 ; montrons que f vérifie (Σ)

On a : f est dérivable $]0, +\infty[$ (Définition de la fonction primitive)

Considérons les fonctions : $u_y(x) = f(xy)$ et $v_y(x) = f(x) + f(y)$ on a u_y et v_y sont dérivable sur $]0, +\infty[$:

$\forall x > 0; \forall y > 0 : u'_y(x) = yf'(xy) \text{ et } v'_y(x) = f'(x) \text{ et on a :}$

$$u'_y(x) = yf'(xy) = y \times \frac{k}{xy} = \frac{k}{x} = f'(x) = v'_y(x) \text{ donc :}$$

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad v_y(x) = u_y(x) + c$$

Pour $x = y = 1$ on aura : $v(1) = u(1) + c$ et puisque $u(1) = v(1)$ alors $c = 0$. d'où :

$$\forall x > 0; \forall y > 0 \quad v_y(x) = u_y(x) \text{ c-à-dire } \forall x > 0; \forall y > 0 \text{ on a : } f(xy) = f(x) + f(y).$$

Propriété :

Les fonctions non nulles qui vérifient (Σ) sont les fonctions primitive de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annulent en 1.

2) Fonction logarithme Népérienne

2.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition :

La fonction **logarithme népérienne** est la fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par \ln .

Conséquences immédiates :

- \ln est définie sur $]0, +\infty[$
- $f(x) = \ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
- $\ln(1) = 0$
- \ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(x \in]0, +\infty[) \left(\ln'(x) = \frac{1}{x} \right)$.

Monotonie :

On a : $(x \in]0, +\infty[) \left(\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \right)$ donc la fonction \ln est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Applications :

Résoudre dans \mathbb{R} :

- ❶ L'équation : $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x)$
- ❷ L'inéquation : $\ln(x^2 - 1) \leq \ln(2 - x)$.

La propriété caractéristique :

$$(\forall x > 0; \forall y > 0)(\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y))$$

Règles de calculs :

- $(\forall x > 0)(\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x))$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0) \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \right)$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q})(\ln(x^r) = r \ln(x))$

Preuve : (En exercice)

Exercice : On pose $\alpha = \ln(2)$ et $\beta = \ln(3)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants : $a = \sqrt[3]{32}$; $b = \frac{\sqrt[3]{24}}{9\sqrt{8}}$

2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction \ln on peut conclure que :

\ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

✓ **Déterminons** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$.

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $\ln(1) = 0$ alors : $\ln(2)$ est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{\ln 2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que : $n \geq \frac{A}{\ln 2}$ (il suffit de prendre $n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$)

On multiplie par $\ln 2$ qui est positif on aura : $n \ln 2 \geq A \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq A$

Comme \ln est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $\ln x \geq \ln 2^n \geq A$

Donc $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow \ln x > A) : (B = \ln 2^n \text{ où } n = E(\frac{A}{\ln 2}) + 1)$ Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

✓ Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

On a : On pose $t = \frac{1}{x}$ on a : $x = \frac{1}{t}$ et $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty \text{ finalement : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

La droite $(\Delta): x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C_{\ln}

✓ Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Exercice :

1- En utilisant le T.A.F de la fonction \ln sur l'intervalle $[1, \sqrt{x}]$; montrer que : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$.

2- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

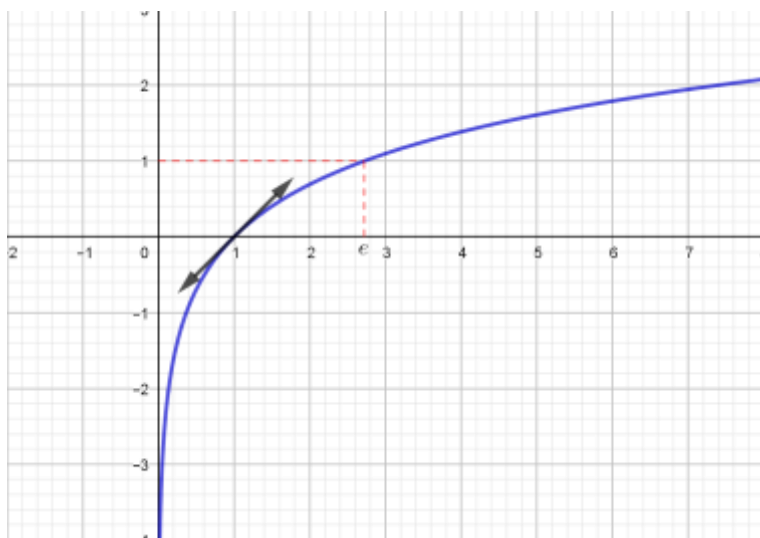
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

La courbe C_{\ln} admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

✓ Le nombre e :

La fonction \ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $\ln(e) = 1$

✓ La courbe C_{\ln} a une tangente en $A(1,0)$ $(T): y = x - 1$



x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'x$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

3) Dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I et **strictement positive sur I** alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I) \left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$

Exercice :

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2x-3}{1+\sqrt{x^2-1}}\right)$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I) \left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$

Preuve : (en exercice)

Etudier deux cas $u(x) > 0$ sur I et $u(x) < 0$ sur I .

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $F(x) = \ln(|u(x)|) + C^{te}$

Applications :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{7x+3}{2x^2+5}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \text{ (Essayer d'écrire } g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \text{ où } a \text{ et } b \text{ des réels à déterminer).}$$

$$h(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$$

$$k(x) = \tan x$$

$$u(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$v(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$$

$$t(x) = \frac{1}{\sin 2x}$$

4) Limites référentielles :

Propriété :

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ | ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ | ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) |
| ④ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) | ⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ | ⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |

Preuves :

$$③ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ voir exercice précédent)}$$

$$④ \text{ on pose } t = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^n} \ln \left(\frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^n} = 0$$

⑤ La fonction \ln étant dérivable en 1 alors : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$ ($\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$)

⑥ On pose : $t = x + 1$ et on applique ⑤.

Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{3x^2+x}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(5x+1)}$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x^2-5x+3)}{\ln(5x-9)}$

④ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{\ln(x^2+3x+2)}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^2 - 2x - 2) \ln(1-x)$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2} \ln(x + \sqrt{x})$

⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + x) - \frac{1}{3} \ln(x^6 + 3x^4)$

⑧ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^4+x+1)}{\ln(x+1)}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition :

Soit a un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par Log_a définie sur $]0, +\infty[$ par :

$(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\text{Log}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \right)$ s'appelle : **la fonction logarithmique de base a**

Exemple :

Pour : $a = e$ on aura : $\text{Log}_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

2) Propriétés et règles de calcul :

Propriété caractéristique

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction \ln restent valables pour la fonction Log_a .

- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y))$
- $(\forall x > 0) \left(\text{Log}_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\text{Log}_a(x) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0) \left(\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\text{Log}_a(x^r) = r\text{Log}_a(x))$

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction Log_a et les propriétés de la fonction \ln

Propriétés :

- La fonction Log_a est une bijection de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R}
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\text{Log}_a(x) = \text{Log}_a(y) \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\text{Log}_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$

Propriété :

La fonction Log_a est continue dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} \right)$

Preuve : (En exercice)

Etude et représentation de Log_a

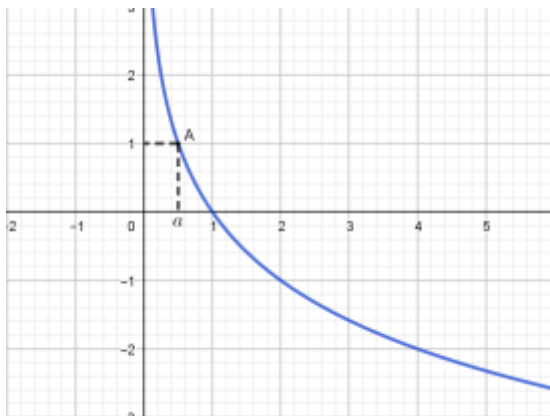
Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

- La fonction Log_a est définie sur $]0, +\infty[$.
- La fonction Log_a est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} \right)$ donc le signe de Log'_a dépend du signe de $\ln a$, ce qui nous amène à discuter deux cas : $\ln a > 0$; $\ln a < 0$

Si $a \in]0, 1[$ alors $\ln a < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0 \right)$.

x	0	a	1	$+\infty$
$\text{Log}'_a(x)$		-	-	
$\text{Log}_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$

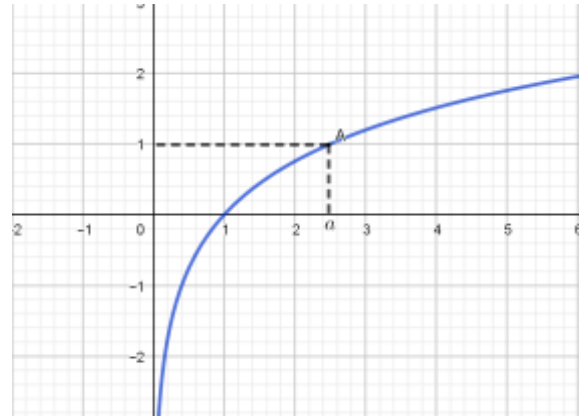


Courbe de la fonction $\text{Log}_{\frac{1}{2}}$

Si $a \in]1, +\infty[$ alors $\ln a > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0 \right)$.

x	0	1	a	$+\infty$
$\text{Log}'_a(x)$		+	+	
$\text{Log}_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Courbe de la fonction $\text{Log}_{\frac{5}{2}}$

3) Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

Définition :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la **fonction logarithmique décimal** et se note par **log**

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \right)$$

Propriétés :

- $\log(10) = 1$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$
- $(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(10^r) = r)$
- $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

4) Applications

Exercice 1 :

- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\text{Log}_x(x+1) = \text{Log}_{x+1}(x)$
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\text{Log}_2(x) > \text{Log}_x(2)$

Exercice 4 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$
4. Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e
5. Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J .
6. Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 5 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g
2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté \bar{g}
b) Etudier la dérivabilité de \bar{g} en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
5. Etudier les branches infinies de la courbe C_g .
6. Construire la courbe C_g