Suite numériques

Exercice 1

Soit a un réel de $]0,1[$ on considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(1+a^{2^k}\right)$

1) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

2) montrer que $(\forall n\in \mathbb{N}^*)\ U_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

3) en déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ و } U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2}$$

1) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \dfrac{1}{2}\leq U_n \leq 1$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente

a) Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq 1-U_{n+1}\leq \frac{2}{5}(1-U_n)$$

b) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq 1-U_n\leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) on pose $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} U_k$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Montrer que $n-\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)\leq \sum_{k=1}^{k=n} U_k \leq n$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 3

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \text{ et } U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+U_n^3}{8}}$$

1) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ puis déduire la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n = \dfrac{7}{8}U_n^3 - \dfrac{1}{8}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique

b) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n\geq 2$ on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x - \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

1) montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2) en déduire que $f_n(x)=0$ admet une seule solution a_n et que $0<a_n<1$

3) montrer que

$$(\forall x\in[0,1])\quad f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$$

Puis étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) déduire que $(a_n)_n$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 5

Soit b un réel de $\mathbb{R}^{*+}$, a tel que $a>\sqrt[3]{b}$.

On considère la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0 = a \text{ و } U_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2U_n + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{U_n}\right)$$

1) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n > 0$

b) montrer que

$$U_{n+1}-\sqrt[3]{b} = \frac{2U_n-\sqrt[3]{b}}{3U_n}\left(U_n-\sqrt[3]{b}\right)$$

c) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n>\sqrt[3]{b}$

puis $(U_n)_n$ est convergente

2) a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}-\sqrt[3]{b}\leq \frac{2}{3}\left(U_n-\sqrt[3]{b}\right)$$

b) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 6

1) a) montrer que $\left(\exists!\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[\right)\quad \tan\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

b) montrer que $\alpha = \pi + \arctan\dfrac{1}{\alpha}$

2) a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(\exists!\beta_n\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\right)\quad \tan\beta_n = n+\frac{1}{\beta_n}$$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha<\beta_n$

c) étudier la monotonie de $(\beta_n)_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

Suites numériques

Exercice 10

f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que $f(x) = x$ a une seule solution α et $1 < \alpha < 2$

2) Montrer que $(\forall x \in [1,2]) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :
$U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite

4) On pose $T_n = (-1)^n (U_n - \alpha)$ و $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} T_k$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}$
en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n \geq 0$

b) Etudier la monotonie de $(S_n)_n$ et montrer qu'elle est majorée

Exercice 11

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_1 = 1$ و

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0$
En déduire que $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \sqrt{1 + V_n}$

c) déduire $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < \sqrt{3}$ puis que $(U_n)_n$ est convergente . on pose $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$

3) a) montrer que $(\forall k > 3) \quad 2^k \geq k^2$

b) montrer que $(\forall k > 2) \quad U_{k+1}^2 - U_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$

en déduire que $\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}$

Exercice 7

Soit n un entier de $\mathbb{N}$ on considère f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x - x$

1) étudier le sens de variation de f

2) montrer que $f(x) = n$ a une solution α_n

3) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est convergente

b) déterminer la limite de $(\alpha_n)_n$

Exercice 8

f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Par : $f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}$

1) a) étudier les variations de f

b) déduire que $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) montrer que $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $(U_n)_n$ la suite définie par :
$U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 9

$(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ deux suites telles que :

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{3^k} \quad و \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{3^k}$$

1) déterminer la limite de $(U_n)_n$

2) a) vérifier que :
$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3V_{n+1} = U_n + V_n$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 3$

c)montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite