

Les suites numériques

1 La suite majorée, minorée et bornée

Définition :

- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq M$.
- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq m$.
- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geq n_0) : |U_n| \leq C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques :

- ★ Toute suite positive est minorée par 0.
- ★ Toute suite négative est majorée par 0.

2 La suite monotone

Définition :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Proposition :

- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} \geq U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \geq 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} \leq U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \leq 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} < U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Remarques :

- ★ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq U_{n_0}$)
- ★ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq U_{n_0}$)

3 La suite arithmétique - la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geq n_0) : U_n = U_p + (n - p)r$	$(\forall n \geq n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + \dots + U_n$	$S_n = \left(\frac{n - p + 1}{2} \right) (U_p + U_n)$	$S_n = \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right) \times U_p ; (q \neq 1)$

Exemple :

$$\star 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \star 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

4 Limite d'une suite

Définition :

- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \rightarrow +\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proposition :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence :

- ★ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ★ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- ★ $\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : |U_n - l| \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{cases} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- ★ $\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{cases} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- ★ $\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \text{ et } (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est divergente}$
- ★ $\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \text{ et } (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est divergente}$

Ordre et convergence :

- ★ $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k) : U_n \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \end{cases} \implies l \geq 0$
- ★ $\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \end{cases} \implies l \leq l'$

Suites de type $f(U_n) = U_{n+1}$:

- $\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle fermé } I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \end{cases} \implies l \text{ est une solution de l'équation } f(x) = x \text{ sur } I$

Les suites adjacentes :

Définition :

On dit $(U_n)_{n \geq p}$ et $(V_n)_{n \geq q}$ sont deux suites adjacentes si :

- ★ $(U_n)_{n \geq p}$ est croissante et $(V_n)_{n \geq q}$ est décroissante.
- ★ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$

Proposition :

$(U_n)_{n \geq p}$ et $(V_n)_{n \geq q}$ sont deux suites adjacentes \implies elles sont convergentes et ont la même limite.