SUITES NUMERIQUES

I) RAPPELLES

1) Suite arithmétique ; suite géométrique

1.1 Activité :

Activité :

Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

Rappelle :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
Relation entre 3 termes Consécutifs a, b et c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
Somme des termes consécutifs	$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $= \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$	$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$ $= v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$ $(q \neq 1)$
Variations	(u_n) est croissantes ssi $r \geq 0$ (u_n) est décroissantes ssi $r \leq 0$	(v_n) est croissantes ssi $q \geq 1$ (v_n) est décroissantes ssi $0 < q \leq 1$ Si $q < 0$ alors (v_n) n'est pas monotone

Exercice :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$ (La suite $(u_n)_n$ s'appelle une suite arithmético-géométrique)

1- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha\ )$

a- Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

2- Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

2) Suites majorée, suites minorée ; Monotonie d'une suite.

Définition (Rappelle) **:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel M tel que :$(\forall n\in\mathbb{I})(u_n\leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel m tel que :$(\forall n\in\mathbb{I})(u_n\geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si: $(\forall n\in\mathbb{I})(u_{n+1}\geq u_n)$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si: $(\forall n\in\mathbb{I})(u_{n+1}\leq u_n)$

Exercice 1 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{7u_n-1}{2u_n+3}\end{cases}$

1- Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0=0 \\ v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}\end{cases}$

1- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.

2- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Exercice 3 :

Soit la suite récurrente $(w_n)_n$ définie par : $\begin{cases} w_0=2 \\ (\forall n\geq 1)\left(w_n=\sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1}+2}\right)\end{cases}$

1- Calculer w_1 ; w_2 et w_3

2- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par ; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(v_n=w_n^n)$

a- Déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$

c- Déterminer v_n puis w_n en fonction de n.

II) LIMITE D'UNE SUITE

1) Activité

Fractale.exe

Activité :

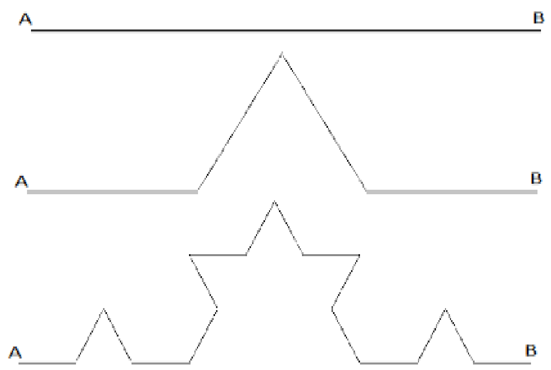
1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R}^+)(1+x)^n\geq 1+nx$.

2- Soit $[AB]$ un segment de longueur $l_0=1$; On procède comme suite : dans l'étape 1 on découpe le segment $[AB]$ en 3 parties égales et on ajoute une quatrième de même longueur.

Dans l'étape 2 on fait la même chose qu'on a fait au segment $[AB]$ au 4 segments obtenus à l'étape 1. ainsi de suite

a) Quelle est le nombre de segments dans l'étape n

b) Quelle est la longueur de la ligne brisée dans l'étape n



3- déterminer un entier n pour la quelle $l_n > 1000$

4- Soit A un réel quelconque positif ; Montrer qu'il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $l_n \geq A$

On peut dire : « **On peut rendre l_n aussi grande qu'on veut** »

Ceci se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n = +\infty$

La ligne brisée "limite" s'appelle une fractal.

2) Définitions

Définition 1 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A)$ on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque : L'expression « quand n tend vers $+\infty$ » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand n tend vers $+\infty$ et on se contente d'écrire : $\lim u_n = +\infty$

Propriété :(limites de référence)

Les suites $(n)_n$; $(n^2)_n$; $(n^k)_n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$; $(\sqrt{n})_n$, $(\sqrt[p]{n})_n$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tendent vers $+\infty$

Exercice : Montrer le dernier résultat

Définition 2 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A)$ on écrit $\lim u_n = -\infty$

Remarque : $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

Définition 3 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers l si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| > A)$ on écrit $\lim u_n = l$

Définition 4 :

Une suite qui tend vers une limite finie l s'appelle une suite **convergente.**
une suite qui n'est pas convergente est une suite **divergente.**

Théorème :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est divergente

demonstration propriété.pdf

Exemple : (Exercice déjà corrigé)

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

La suite $(v_n)_n$ est croissante.
La suite $(v_n)_n$ est majorée par 2. donc elle est convergente.

Remarque :

Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais elle est convergente.

Remarque :

Suite divergente veut dire que la suite n'a pas de limite finie c'est-à-dire que la suite n'a pas de limite ou elle a une suite infinie.

Exemples :

- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_n$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$; $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_n$ sont des suites convergentes
- Les suites $(n)_n$; $(-n^2)_n$; $\left(n^k\right)_n$; $((-1)^n)_n$; $(cosn)_n$ sont divergentes

Théorème :

Si une suite $(u_n)_n$ admet une limite finie l cette limite est **unique**

Preuve : (En exercice)

Utiliser la définition et la propriété :$|a + b| \leq |a| + |b|$

3) Opération sur les limites des suites.

1) Limite de la somme

$\lim u_n$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Formes indéterminées

2) Limites des produits

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées

3) Limites des inverses

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{1}{u_n}\right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

3) Limites des quotients

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées	Formes indéterminées

Propriété :

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

4) Les techniques de calculs des limites

Théorème 1:

Si la suite $(u_n)_n$ est définie d'une façon explicite $u_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \left(\frac{2n^2+n}{\sqrt[3]{n^5+n^2}}\right)$

2. $\lim\left(n\ Arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
3. $\lim\left(\sqrt[4]{n^3+n^2}-\sqrt{n+1}\right)$

Théorème 2 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques tels que : $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\leq u_n)\\ \lim v_n=+\infty\end{cases}$

On a alors : $\lim u_n=+\infty$.

Preuve : (On utilise la définition des limites)

Propriété 1 :(l'inégalité de Bernoulli)

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R}^+)(1+x)^n\geq 1+nx$$

Corolaire :

- Si $q>1$ alors $\lim q^n=+\infty$
- Si $-1<q<1$ alors $\lim q^n=0$
- Si $q\leq -1$ la suite $(q^n)_n$ est divergente.

Preuve :

1. Pour $q>1$: On pose $q=1+x$ où $x>0$ et donc $q^n=(1+x)^n\geq 1+nx$ et comme $\lim 1+nx=+\infty$ alors d'après le théorème précèdent : $\lim q^n=+\infty$
2. Pour $-1<q<1$
   a) Pour $q=0$ on a : $\lim 0^n=0$
   b) On suppose que $q\neq 0$ on a : $\left|\frac{1}{q}\right|>1$ et par suite : $\lim\left|\frac{1}{q}\right|^n=\lim\frac{1}{|q|^n}=+\infty$
   d'où et d'après les opérations sur les limites on a : $\lim|q|^n=0$ donc $\lim q^n=0$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\left(-\frac{4}{7}\right)^n$
2. $\lim\left(\frac{2^n-3^n}{3^n-5^n}\right)$
3. $\lim\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

5) Les limites et l'ordre :

Théorème :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques. On a les assertions suivantes :

❶ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\leq u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\geq 0$

❷ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(a\leq u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\geq a$

❸ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\leq u_n\leq b)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $a\leq l\leq b$

❹ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\leq u_n)\\ \lim u_n=l \text{ et } \lim v_n=l'\end{cases}$ alors $l'\leq l$

6) Les critères de convergences.

6.1 Critères fondamentaux :

Critère 1 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases}(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0\end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

Critère 2 :

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases}(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n \leq u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l\end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

Critère 3 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases}(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty\end{cases}$ alors $\lim u_n = +\infty$

Critère 4 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases}(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty\end{cases}$ alors $\lim u_n = -\infty$

Preuve :

En utilisant la définition des limites montrer l'un des 4 critères.

Exercice :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim \frac{3n+\sin(n)}{n+1}$
2. $\lim \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2+k}\right)$
3. $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

6.2 Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

Critère 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si $\begin{cases}\lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l\end{cases}$ alors $\lim f(u_n) = f(l)$

Exercice :

Déterminer :

1. $\lim \arctan\left(n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2. $\lim \sqrt[3]{n \arctan\left(\frac{8}{n}\right)}$

6.3 Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Activité :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite (Δ) $y = x$
2. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n$
   b) Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ et sa limite potentielle.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$
   a) Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Critère 6 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

Si :

d) f est continue sur I
e) $f(I) \subset I$
f) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$
g) $u_0 \in I$ (donc $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$
h) $(u_n)_n$ est convergente

Alors la suite $(u_n)_n$ tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

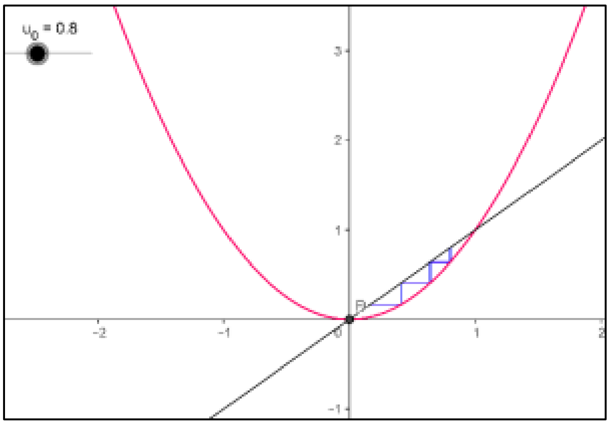
Remarque :

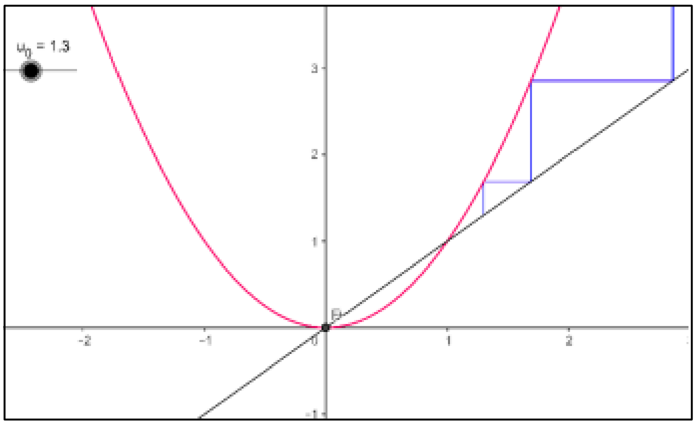
1- Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solution ; Dans ce cas prenez celle qui est dans I.

S'il y a plusieurs solutions de l'équation $f(x) = x$; utiliser la monotonie de (u_n)

2- La fonction f et la suite $(u_n)_n$ n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Pour la même fonction $f : x \mapsto x^2$ si on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ elle sera décroissante convergente (Prouver le) ; mais si on considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 1.3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ elle sera croissante divergente.





Exercices d'applications

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer $f([0,2])$
2. a) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I = [0,2])$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
   c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Critère 8 :

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Preuve :

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante non majorée et montrons : (P) $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow u_n > A)$

Soit $A > 0$ puisque $(u_n)_n$ est non majorée alors il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$

et puisque $(u_n)_n$ est croissante alors si $n > n_0$ alors $u_n > u_{n_0} > A$

donc il existe N $(N = n_0)$ qui vérifie la propriété (P)

D'où la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

Exercice

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite $(u_n)_n$ est croissante
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Propriété :

Toute suite convergente est bornée

Remarque : La réciproque n'est pas vraie : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

6.4 Les suites adjacentes :

Activité :

Soit les suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont appelées : ***Suites adjacentes.***

Définition :

On dit que deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si :

- L'une est croissante l'autre est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

Propriété :

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites **adjacentes** et $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Preuve :

Par hypothèse on a : $(u_n)_n$ est croissante donc $u_n \leq u_{n+1}$

$(v_n)_n$ est décroissante donc $v_{n+1} \leq v_n$

Par suite : $(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \leq (u_n - v_n) - (u_n - v_n) = 0$

D'où la suite $(u_n - v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc elle est de termes positifs et finalement

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Exercice :

Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad v_0 = b \quad 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante
3. a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)\right)$

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$

   c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes
4. Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.