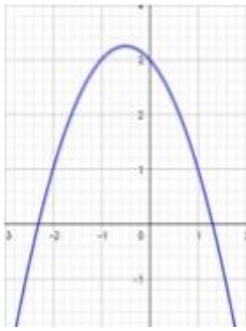


THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

1) Activités

Activité 1 : La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction : $f(x) = -x^2 - x + 3$

1- Vérifier que $f(-2) = f(1)$.



2- Trouver le réel c dans

$] -2, 1[$ tel que $f'(c) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Remarques : 1) $f(-2) = f(1) = 1$

2) f est continue sur $[-2; 1]$ et

dérivable sur $] -2; 1[$

3) $f'(x) = -2x - 1$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow -2c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \in] -2; 1[$$

Donc il existe $c = -\frac{1}{2} \in] -2; 1[$ tel que : $f'(c) = 0$

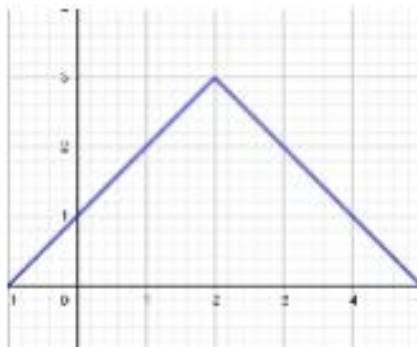
4) l'existence de c vient du fait que la fonction admet un minimum en ce point et de la dérivabilité de f en ce point.....

Activité 2 : Dans la courbe ci-dessous

on a $f(0) = f(4)$

Quelle est la valeur logique de l'assertion :

$(\exists c \in]0, 4[)(f'(c) = 0)$?



Remarque : fausse (la dérivabilité de f en 2 ??)

2) Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

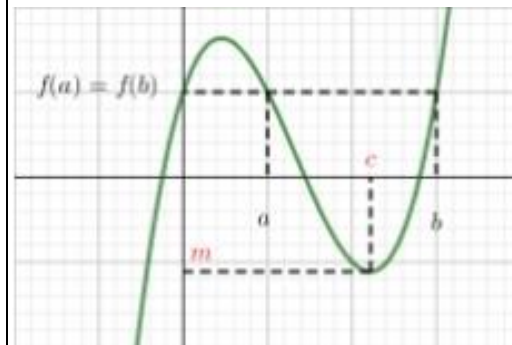
Preuve :

Puisque f est continue alors ils existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que : $f([a, b]) = [m, M]$, où $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

1) Si $m = M$ alors f est constante sur $[a, b]$ d'où $(\forall x \in]a, b[)(f'(x) = 0)$

2) Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.

a) Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f(c) = m$



$$(\forall x \in]a, c[) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \leq 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_g(c) \leq 0$$

$$\text{D'autre part : } (\forall x \in]c, b[) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \geq 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_d(c) \geq 0$$

et puisque f est dérivable en c alors :

$$f'_g(c) = f'_d(c) = 0$$

b) Si $f(a) < M$ même démonstration.

Remarque :

1) Il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c) = 0$.

2) Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$ [tout entier]

Exemple : la fonction f définie par :

$$f(x) = |x| \text{ sur } [-1, 1]$$

2) Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue sur $[a, b]$, tout entier

3) Applications du théorème de Rolle

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2 \quad \text{Montrer que } f'$$

s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$

Solution : on a : $f(0) = f(1) = 2$

Donc f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que : $f(0) = f(1)$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, b[$ tel

que : $f'(c) = 0$ donc : f' s'annule au moins une

fois sur $]0, 1[$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x},$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Solution : on a : $f(a) = f(a + 2\pi)$

Donc f une fonction continue sur $[a, a + 2\pi]$, dérivable sur $]a, a + 2\pi[$ et telle que :

$f(a) = f(a + 2\pi)$ D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, a + 2\pi[$ tel que : $f'(c) = 0$

donc : f' s'annule au moins une fois sur

$]a, a + 2\pi[$

Exercice 3 : Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer : $(\exists c \in]-1, 1[) (f'(c) = 0)$

Solution : la fonction f continue sur $[-1, 1] - \{0\}$ et dérivable sur $[-1, 1] - \{0\}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2} 4\pi^2 x = 0 = f(0)$$

Donc : f est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2} 4\pi^2 = 2\pi^2 \in \mathbb{R}$$

Donc : f est dérivable en 0

Donc : fonction f continue sur $[-1, 1]$ et dérivable

sur $[-1, 1]$

Et on a : $f(-1) = f(1)$

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]-1, 1[$ tel que : $f'(c) = 0$

$$\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2 + 1)^2}$$

Exercice 4 : Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$u(t) = \text{Arctan}(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel

$$\text{que : } \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

2) En déduire la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

Solution : 1)

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)} \Leftrightarrow u(x)v'(c) - v(x)u'(c) = 0$$

On Considérer la fonction : g tel que :

$$g(t) = u(x)v(t) - v(x)u(t) \text{ sur } [a, b]$$

où $a = \inf(x, 0)$ et $b = \sup(x, 0)$

on a : $g(0) = g(x) = 0$ et g continue sur $[a, b]$ et

dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = 0$.

$$\text{On a : } g'(t) = u(x)v'(t) - v(x)u'(t)$$

Donc : il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$u(x)v'(c) - v(x)u'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - c^2}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-c^2}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-c}{2} = 0$$

Car ; si $x \rightarrow 0$ alors $c \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-c}{2(1+c^2)} = 0$$

4) Théorème des accroissements finies T.A.F :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Preuve : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

Considérons une fonction g tel que :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Et puisque : g est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (somme de fonctions dérivables et continues) et on a : $g(a) = g(b) = 0$
D'après le théorème de Rolle il existe un réel

$c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = 0$

$$\text{On a : } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\text{Donc : } g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

$$\text{Donc on a : } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

5) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Théorème1 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

S'ils existent deux réels M et m tels que :

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in]a, b[$$

Alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Preuve : On a : f est fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

donc d'après le T. A.F il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \text{ et puisque } m \leq f'(x) \leq M$$

$$\forall x \in]a, b[\text{ alors : } m \leq f'(c) \leq M$$

$$\text{donc : } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$$

$$\text{donc : } m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Théorème2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable sur I

et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k)$ (où $k \in \mathbb{R}^*$)

Alors : $(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$

Preuve : Soient x et y deux éléments de I

Si $x \neq y$ On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne x et y . donc, et d'après le T. A.F

il existe c compris entre x et y tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \text{ et puisque } c \in I$$

$$\text{Alors : } |f'(c)| \leq k$$

$$\text{donc : } |f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq k|x - y|$$

Si $x = y$ l'inégalité est vraie.

D'où la preuve du théorème.

Exemple1 : En utilisant le I.A.F

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$

Solution :

Considérons une fonction f tel que :

$$f(x) = \sin x \text{ on a : } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Et } f'(x) = \cos x \text{ et } |f'(x)| = |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par application de I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et x ($[a, b]$ où $a = \inf(x, 0)$ et $b = \sup(x, 0)$)

$$|f(b) - f(a)| \leq 1|(b-a)|$$

$$\text{Donc : } |\sin x - \sin 0| \leq 1|(x-0)|$$

$$\text{Donc : } |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple2 : En utilisant le I.A.F

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a \leq b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

Solution : Considérons une fonction f tel que :

$$f(x) = \arctan x \text{ on a : } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{1+b^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{1+a^2} \quad \forall x \in [a, b]$$

Par application de T.A.F sur l'intervalle $[a, b]$

$$\text{On a : } \frac{1}{1+b^2}(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \frac{1}{1+a^2}(b-a)$$

Donc : $\frac{b-a}{1+b^2} \leq ar \tan b - ar \tan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ Montrer que

l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$

Solution : f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3)$

D'après le théorème de Rolle on a :

$\exists \alpha \in]-3; -2[/ f'(\alpha) = 0$

$\exists \beta \in]-2; -1[/ f'(\beta) = 0$

$\exists \delta \in]-1; 0[/ f'(\delta) = 0$

Et puisque : α ; β et δ sont différents deux à deux

Donc : l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions

sur $\mathbb{R}$ car $f'(x)$ est de degré 3

Exercice 2 : Considérons une fonction f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que :

$f(0) - f(1) = -1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle

$(\exists c \in]0,1[) \left(\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \right)$

Solution : $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \Rightarrow f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0$

Considérons une fonction g tel que :

$G(0) = G(1)$

Soit G la fonction primitive de g

donc : $G(x) = f(x) + \frac{2}{x^2+1}$

$G(0) - G(1) = f(0) + 2 - f(1) - 1 = f(0) - f(1) + 1 = 0$

Donc ; $G(0) = G(1)$

Et puisque : G est une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ (somme et quotient de fonctions dérivables et continues)

D'après le théorème de Rolle il existe un réel

$c \in]0, 1[$ tel que : $G'(c) = 0$

Et on a : $G'(x) = f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$G'(c) = f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{4c}{(c^2+1)^2}$

il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que :

Exercice 3 : En utilisant le Théorème des accroissements finies (T.A.F) donner un

encadrement du nombre $\sqrt{10001}$ et en déduire

une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la

précision 5×10^{-5} .

Solution : Considérons une fonction f tel que :

$f(x) = \sqrt{x}$ on a : On a : f est fonction continue

sur $[10000, 10001]$ et dérivable sur

$]10000, 10001[$ [donc d'après le T. A.F il existe

$c \in]10000, 10001[$ [tel que : $\sqrt{10001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$

Donc : $\sqrt{10001} = \frac{1}{2\sqrt{c}} + 100$

$c \in]10000, 10001[$ [donc $10000 < c < 10001$

Donc : $\sqrt{10000} < \sqrt{c} < \sqrt{10001}$ donc

$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}}$ donc

$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200}$ et on a : $\sqrt{10001} < 101$

Donc : $\frac{1}{202} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200}$ donc

$\frac{1}{202} + 100 < \frac{1}{2\sqrt{c}} + 100 < \frac{1}{200} + 100$ donc :

$100,00495 < \sqrt{10001} < 100,005$

Donc : $0 < \sqrt{10001} - 100,00495 < 0,00005$

Donc : $|\sqrt{10001} - 100,00495| < 5 \times 10^{-5}$ donc $100,00495$

Est une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la précision 5×10^{-5} .

Exercice 4 : soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer u_1 ; u_2 et u_3

2)a) monter que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

b) en déduire que : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Solution : 1) $u_1 = 1$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

2)a) : Considérons une fonction f tel que :

$f(t) = \ln t$ on a : On a : f est fonction continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur

$]x, x+1[\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ donc d'après le T. A.F il existe

$c \in]x, x+1[$ tel que : $f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$

Donc : $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$ et puisque : $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

Car $c \in]x, x+1[$ donc : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

2)b) déduire que : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$?

On a : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Donc : $\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

La somme de ces inégalités membre a membre

donne : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Donc : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ car $\ln 1 = 0$

2)b) on a : $\ln(n+1) \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur

l'intervalle $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x$ et la

suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$u_0 \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

1) montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une

solution unique $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$

2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3)a) montrer que : $\forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) en déduire que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Solution : 1) Considérons une fonction g tel que :

$g(x) = f(x) - x$ On a : g est une fonction

dérivable sur $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 = -\cos x - 1 < 0$

g est une fonction continue et strictement décroissante

sur $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$ donc une bijection de $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$

dans : $g\left(\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left]-1; \frac{2\pi-3}{6}\right[$

Puisque : $0 \in \left]-1; \frac{2\pi-3}{6}\right[$ alors il existe un unique

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $g(\alpha) = 0$ cad $f(\alpha) = \alpha$

2) montrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2} ?$

a) on a : $u_0 \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc vraie pour $n=0$

b) supposons que : $\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

c) montrons que : $\frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

on a : $f'(x) = -\cos x \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc f est

décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ et on a : $\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(u_n) < f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

donc $\frac{\pi}{2} - 1 < u_{n+1} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ et on a $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - 1$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$

donc : $\frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$ finalement : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3) a) montrons que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} ?$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] f'(x) = -\cos x$ et puisque $x \rightarrow \cos x$

est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a donc :

$\cos \frac{\pi}{2} < \cos x \leq \cos \frac{\pi}{6}$ donc : $0 < \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\cos x \leq 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) déduire que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N} ?$

puisque f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ alors f est

dérivable et continue sur tout intervalle de la

forme $[a; b] \subset \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc Par application de I.A.F

sur l'intervalle $[a; b]$ avec : $u_n = b$ et $a = \alpha$

on trouve : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n ?$

Montrons avant que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

on a : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ donc vraie pour $n=0$

b) supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

c) montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| ?$

on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|$

donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

donc : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

Exercice6 : Soit f une fonction dérivable trois fois sur $[0;1]$ tel que : $f(1)=1$ et $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$

Et soit le polynôme : $P(x) = x^2(-2x+3)$

1)calculer : $P(0)$; $P'(0)$; $P(1)$; $P'(1)$

2)on pose : $g(x) = f(x) - P(x)$

a) montrer qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que : $g^{(3)}(\alpha) = 0$

b) en déduire qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$f^{(3)}(\alpha) = -12$$

Solution : 1) $P(x) = x^2(-2x+3)$ et $P'(x) = -6x^2 + 6x$

Donc : $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et $P(1) = 1$

2) a) montrons qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$g^{(3)}(\alpha) = 0 ?$$

puisque f et P sont dérivables trois fois sur $[0;1]$

donc $g = f - P$ est dérivable trois fois sur $[0;1]$

et par application du théorème de Rolle trois fois :

$$g(0) = g(1) \Rightarrow \exists c_1 \in]0;1[/ g'(c_1) = 0 \text{ (} g^{(1)}(c_1) = 0 \text{)}$$

$$g^{(1)}(0) = f^{(1)}(0) - P^{(1)}(0) = 0 - 0 = 0$$

$$g^{(1)}(c_1) = g^{(1)}(0) \Rightarrow \exists c_2 \in]0;1[/ g^{(2)}(c_2) = 0$$

$$g^{(1)}(c_1) = g^{(1)}(1) \Rightarrow \exists c_3 \in]0;1[/ g^{(2)}(c_3) = 0$$

$$g^{(2)}(c_2) = g^{(2)}(c_3) \Rightarrow \exists \alpha \in]c_2; c_3[/ g^{(3)}(\alpha) = 0$$

Et puisque : $]c_2; c_3[\subset]0;1[$ donc :

$$\exists \alpha \in]0;1[/ g^{(3)}(\alpha) = 0$$

b) $\exists \alpha \in]0;1[$ tel que : $f^{(3)}(\alpha) = -12$?

on a : $g(x) = f(x) + 2x^3 - 3x^2$

$$g'(x) = f'(x) + 6x^2 - 6x \text{ donc : } g''(x) = f''(x) + 12x$$

donc : $g^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) + 12$ donc :

$$g^{(3)}(\alpha) = f^{(3)}(\alpha) + 12 = 0$$

donc : $\exists \alpha \in]0;1[/ f^{(3)}(\alpha) = -12$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

