

## Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x + \sin x} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{2} E\left(\frac{1}{2x}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

- 1) montrer que  $f$  est dérivable à droite de  $a = 0$
- 2) la fonction  $f$  est-elle dérivable en  $a = 0$  ?

☞ étudier la dérivabilité de  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4}-1}{\sqrt{x+1}}$  au point  $x_0 = 4$

☞ étudier la dérivabilité de  $f(x) = \sin^2 x E\left(\frac{x}{2}\right)$  et  $f(0) = 0$  en  $x_0 = 0$

## Exercice 2

- 1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}$

- 2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

- 3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

- 4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left( \sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right)$$

## Exercice 3

soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- 1) a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 1} - x \geq 0$
- b) exprimer  $f(-x)$  en fonction de  $f(x)$  que peut-on déduire ?
- 2) montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis calculer  $f'(x)$
- 3) en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x$

### Exercice 4

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x$

- 1) montrer que  $F$  est deux fois dérivable et que  $F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x)$
- 2) étudier le sens de variation de  $F'$  déduire le signe de  $F'(x)$
- 3) en déduire que  $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \sin^2 x \leq \frac{4}{\pi}x(\pi - x)$

### Exercice 5

Soit  $h$  la fonction définie sur  $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $h(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

- 1) montrer que  $h$  est une bijection de  $D$  vers  $J$  à déterminer
- 2) montrer que  $h^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et on a  $(\forall x \in J) (h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
- 3) en déduire que  $(\forall x \in J) h^{-1}(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$

### Exercice 6

$G$  est la fonction définie sur  $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $G(x) = \sin x$

- 1) montrer que  $G$  est bijective de  $I$  vers  $J$  que l'on déterminera
- 2) montrer que  $G^{-1}$  est dérivable sur  $] -1, 1 [$  et que  $(G^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 3) on pose  $h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x-1)$
- a) montrer que le domaine de  $h$  est  $D = [0, 1]$
- b) montrer que  $h$  est dérivable sur  $] 0, 1 [$  puis calculer la dérivée  $h'(x)$
- c) calculer  $G^{-1}(1)$  et déduire que  $(\forall x \in [0, 1]) 2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x-1)$

### Exercice 7

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$

- 1) montrer que  $(\exists c \in [a, b]) 2f(c) = f(a) + f(b)$
- 2) on pose  $g(x) = f(x) - f(c)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$  montrer que  $(\exists \alpha \in [a, b]) g(\alpha) = 0$
- 3) on suppose que  $\alpha \neq c$ . déduire que  $(\exists \beta \in [a, b]) f'(\beta) = 0$

### Exercice 8

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) = f(b)$  et  $f'(a)f'(b) < 0$  montrer que  $(\exists c \in ]a, b[) f''(c) = 0$