



TD : LA DERIVATION – APPLICATIONS

Etude de fonctions

Exercice1 : Soit $f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$

Etudier les variations de la fonction f

Exercice2 : Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad 2) g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Exercice4 : Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$$I_1 =]-\infty; 1] \text{ et minorée sur l'intervalle : } I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ et}$$

$$\text{bornée sur l'intervalle : } I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

Exercice5 : Soit la fonction f définie sur $I = [0; \pi]$

par : $f(x) = \sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad 1) \text{ Déterminer } D_f$$

2) montrer que la droite $(\Delta): x = \frac{1}{2}$ est un axe

de symétrie de la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x \quad \text{Montrer que le point } \Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$$

est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice8 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -1$.

2. donner une interprétation géométrique

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontale

4) étudier les variations de f et dresser le

tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un

axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Exercice10 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

- 1) Déterminer D_f
- 2) Déterminer les limites aux bornes de D_f
- 3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1
- 5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f
- 6) tracer la courbe (C_f)

Exercice11 : soit f une fonction définie sur \mathbb{R}

par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}; si \dots x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)\left(1 + \arctan \frac{1}{x}\right); si \dots 1 > x \end{cases}$$

(C_f) La courbe de f dans un repère orthonormé

- 1) a) montrer que f est continue en $x_0 = 1$
- b) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une Interprétation géométrique du résultat :
- 2) a) calculer les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$
- c) Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 3) a) étudier les variations de f sur $I =]-\infty; 1[$
- b) donner le tableau de variation de f' sur $K = [1; +\infty[$ et en déduire les variations de f sur K

4) soit g la restriction de f sur $J =]-\infty; 0]$

- a) Montrer que g est une bijection de J vers un intervalle L que l'on déterminera
- b) résoudre dans \mathbb{R}^+ l'équation suivante :
 $t^3 - 3t - 2 = 0$ et déterminer : $g^{-1}(-2)$ et $(g^{-1})'(-2)$
- c) Représenter (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère orthonormé.

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer que f est périodique de période $T = \pi$ et en déduire le domaine d'étude de f
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Exercice14 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$
- 5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$
- 6) déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)
- 7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

