

TD :LA DERIVATION –APPLICATIONS

Etude de fonctions

Exercice1 : Soit $f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = \left(x\sqrt{x^2 - x} \right)' = x'\sqrt{x^2 - x} + x \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de $4x^2 - 3x$ est :

x	$-\infty$	0	$3/4$	$+\infty$
$4x^2 - 3x$	+	0	-	0

On a : $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]1; +\infty[$ et $\forall x \in]-\infty; 0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3; +\infty[$

et sur $]-\infty; 0[$

Exercice2 : Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 + x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 \text{ deux solutions : } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -2$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$10/3$	$-7/6$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-\frac{7}{6}$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $\frac{10}{3}$ en -2

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad 2) g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

f' s'annule en $\frac{1}{3}$ en changeant de signe à droite

et à gauche alors f admet un extremum en $\frac{1}{3}$

Du tableau de variation de f on déduit que :

f Admet une valeur minimal absolue

c'est $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{2}{3}$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc

dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R} et g n'admet pas d'extremums

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$$\forall x \in D_h : h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \quad \frac{3}{(x-1)^2} > 0$ Le signe de $h'(x)$

est le signe de $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	–	+
$h(x)$	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	-1

h' s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1
Du tableau de variation de f on déduit que :

f Admet une valeur maximal relative

c'est $-\frac{1}{4}$ en -1

Exercice4 : Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$I_1 =]-\infty; 1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	-5	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ en déduire que f Admet une valeur maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\frac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1 : f(x) \leq \frac{7}{4}$ donc que f est majorée sur

l'intervalle : $I_1 =]-\infty; 1]$ par $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2 : -5 \leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

Exercice5 : Soit la fonction f définie sur $I = [0; \pi]$ par : $f(x) = \sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f''(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

2x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 2x$	+	0	-	0

On a donc :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f''(x)$	+	0	-	0

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

(C_f) est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ et

$B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad 1) \text{Déterminer } D_f$$

2) montrer que la droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : 1) On a : $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	-	0	+	-

donc : $D_f = [0, 1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0, 1]$ alors $1-x \in D_f$?

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1$$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1-x \in D_f$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x)$???

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \sqrt{(1-x) - (1-x)^2} = \sqrt{1-x - (1-2x+x^2)} \\ &= \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de

symétrie de la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x . \text{ Montrer que le point } \Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$$

est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

$$\text{donc } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice8 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivable de f a droite en $x_0 = -1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f = [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0 = -1$.

2) Interprétation géométrique :

La courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1; f(-1))$ dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le

tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite (Δ): $y = 2$ est une asymptote horizontale a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

$$b) \text{on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2 + \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite (Δ'): $x = 0$ est une asymptote a la courbe C_f

$$c) \text{on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite (Δ''): $x = 1$ est une asymptote a la courbe C_f 3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

si $x \in]0;1[$ alors $f(x) - 2 > 0$

Donc la courbe C_f est au-dessus de (Δ) : $y = 2$

si $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x) - 2 < 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ) : $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe

des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x \in D_f$ alors $1-x \in D_f$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0;1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

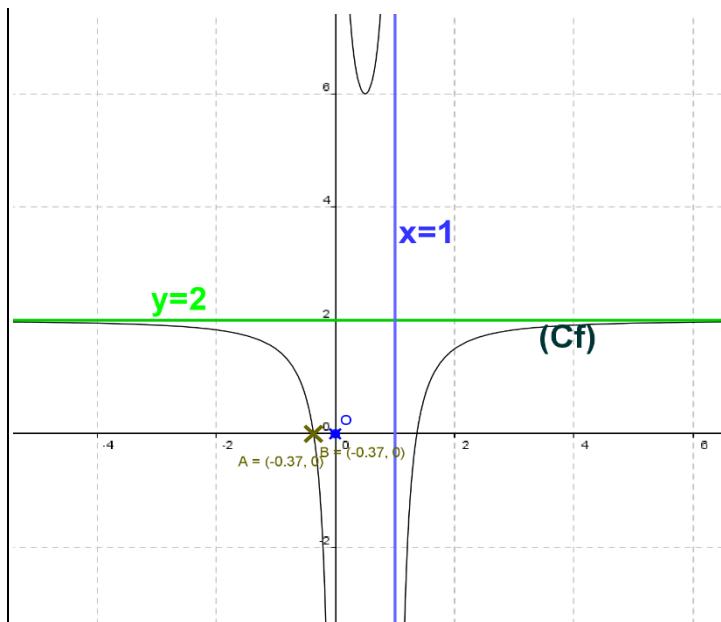
alors $1-x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

donc $f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice 10 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0

Donc : $D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) on a : $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$

Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étude de la dérivabilité de f à droite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2

et à gauche de -1

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1, 0)$ et $B(2, 0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

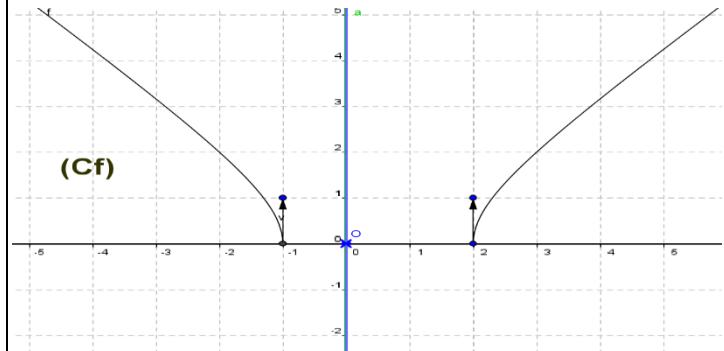
$$\text{Donc : } f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x - 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$	0	0	$+\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exercice 11 : soit f une fonction définie sur \mathbb{R}

par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}; \text{ si } \dots x \leq 1 \\ f(x) = (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x} \right); \text{ si } \dots 1 > x \end{cases}$$

(C_f) La courbe de f dans un repère orthonormé

1)a) montrer que f est continue en $x_0 = 1$

b) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat :

2)a) calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- b) montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation (Δ) : $y = x$ au voisinage de $+\infty$
- c) Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 3)a) étudier les variations de f sur $I =]-\infty; 1[$

b) donner le tableau de variation de f' sur $K = [1; +\infty[$ et en déduire les variations de f sur K

4) soit g la restriction de f sur $J =]-\infty; 0]$

a) Montrer que g est une bijection de J vers un intervalle L que l'on déterminera

b) résoudre dans \mathbb{R}^+ l'équations suivante :

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \quad \text{et déterminer : } g^{-1}(-2) \text{ et } (g^{-1})'(-2)$$

c) Représenter (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère orthonormé.

Solution : on a $f(1) = 0$

$$1)a) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x} \right) = 0 = f(1)$$

Donc f est continue à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = 0 = f(1)$$

Donc f est continue à gauche en $x_0 = 1$

Donc f est continue en $x_0 = 1$

• b) étude de la dérивabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demi tangente à droite

$$\text{de } A(1, 0) \text{ de coefficient directeur } f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'équation: } y = f(1) + f'_d(1)(x-1) \text{ avec } x \geq 1$$

$$y = 0 + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)(x-1) \Leftrightarrow (T_d): y = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)(x-1) \quad \text{avec } x \geq 1$$

• étude de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demi tangente vertical à gauche de $A(1, 0)$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 - 3x\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + x \left(1 - 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} \right)$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x} \right) - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} - 1 - \arctan \frac{1}{x}$$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0 \quad \text{on calcule} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = ??$$

$$\text{On pose: } t = \arctan \frac{1}{x} \quad \text{donc: } \tan t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan t}$$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$$

Donc : la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation (Δ) : $y = x$ au voisinage de $+\infty$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 3\sqrt[3]{1-x} = +\infty$$

la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite (Δ) : $y = x$ au voisinage de $-\infty$

3)a)étude des variations de f sur $I =]-\infty; 1[$

On a : $f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$ si $x < 1$ est dérivable sur $I =]-\infty; 1[$ (la somme de fonctions dérivables) sur I

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) = 1 + 3 \times \frac{1}{3} (1-x)' (1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 - (1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - 1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \text{ et puisque : } \sqrt[3]{(1-x)^2} > 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad \text{le signe de } f'(x) \text{ est celui de } \sqrt[3]{(1-x)^2} - 1 \\ \sqrt[3]{(1-x)^2} \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x(2-x) \geq 0$$

TV : de variations de f

b)on a f est dérivable sur $K = [1; +\infty[$ (la somme de fonctions dérivables sur K)

$$\forall x \in K = [1; +\infty[\quad f'(x) = 1 + \arctan \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

donc f' est dérivable sur K (la somme de fonctions dérivables sur K)

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x \in K = [1; +\infty[$$

donc f' est décroissante sur K

et puisque f' est continue sur K alors :

$$f'(K) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f'; f'(1) \right] = \left[1; 1 + \frac{\pi}{4} \right] \text{ donc } f'(x) > 0$$

$\forall x \in K = [1; +\infty[$ donc f est croissante sur K

Le tableau de variation de f' sur $K = [1; +\infty[$ est :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$	$-\infty$	2	0	$+\infty$

$$4)a) \text{on a : } g(x) = f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} \quad \forall x \in J$$

D'après les questions précédentes on a g est continue et strictement croissante sur J alors g est une bijection de J vers un l'intervalle

$$K = g(J) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} g; g(0) \right] =]-\infty; 2]$$

b)on a $t=2$ est une solution de l'équation :

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ la division euclidienne donne :}$$

$$t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^2 \text{ une solution de}$$

$$\text{l'équation : } t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \text{ est } S = \{2\}$$

$$\text{on pose : } g^{-1}(-2) = x \Leftrightarrow -2 = g(x) \text{ et } x \in J$$

$$\text{donc : } x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = -2 \text{ et } x \in J$$

$$\text{on pose : } t = \sqrt[3]{1-x} \text{ donc : } t^3 - 3t - 2 = 0 \text{ et } t \geq 1$$

D'après les questions précédentes : $t = 2$

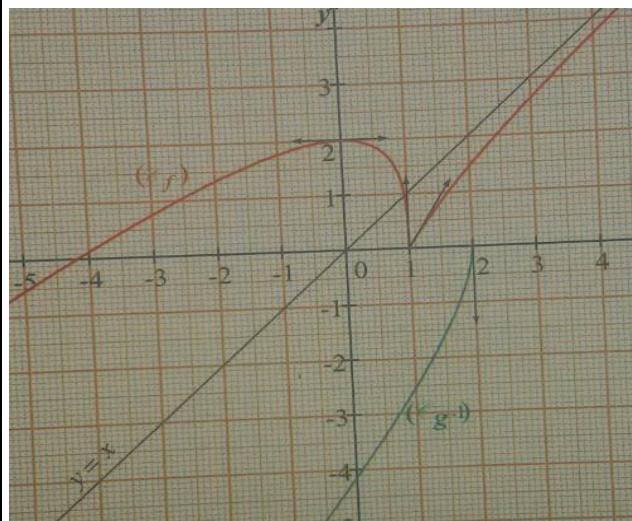
Donc : $x = 1 - t^3 = -7$ donc : $g^{-1}(-2) = -7$

Et puisque : $g'(-7) \neq 0$ alors on a :

$$(g^{-1})'(-2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(-2))} = \frac{1}{g'(-7)}$$

Et puisque : $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alors : $g'(-7) = \frac{3}{4}$ donc : $(g^{-1})'(-2) = \frac{4}{3}$



Exercice 12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période

$T = \pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = \pi$

Remarque : la fonction : $x \rightarrow \cos(ax + b)$ est

périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$ si $a \neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = \pi$ donc par exemple : $D_E = [0; \pi]$

3) $f'(x)$ et le tableau de variation de f ?

f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigonométrique on déduit le signe de

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$
. Le tableau de signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x + \frac{\pi}{4})$	+	0	-	0

le tableau

de variation de f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$\sqrt{2}$	-2	2	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f on déduit que f change de signe n sur les intervalles $[0; \frac{3\pi}{8}]$ et $[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

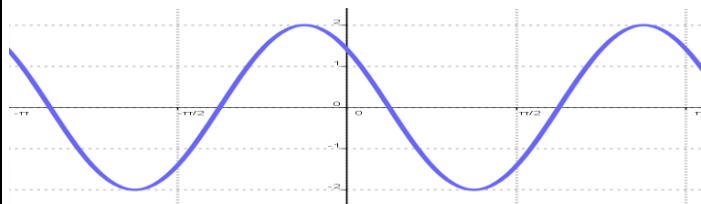
On va résoudre dans $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation : $f(x) = 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E = [0; \pi]$

Et on déduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$



Exercice 13 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de f

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de f ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x) \text{ Donc } f \text{ est impaire}$$

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0; \pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0; \pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

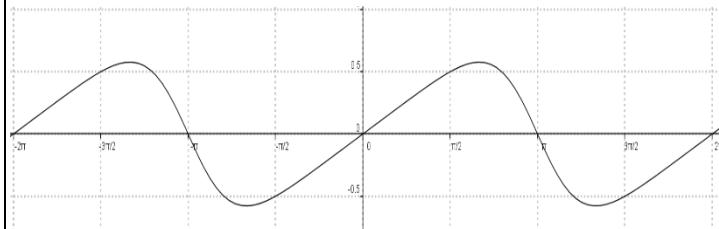
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Exercice 14 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période

$T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de

variation de f

4) donner l'équation de la tangente (T) à la courbe

de f en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$

$$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$$T = 2\pi$$

donc par exemple : $D_E = [0; 2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0; 2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a : $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$

$$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ Donc :}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	1	3	-5	1

4) l'équation de la tangente (T) à la courbe de f

en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x + 1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1; 1]$ et l'équation $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$$\Delta = 9 \text{ les solutions sont : } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1$$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigonométrique on déduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

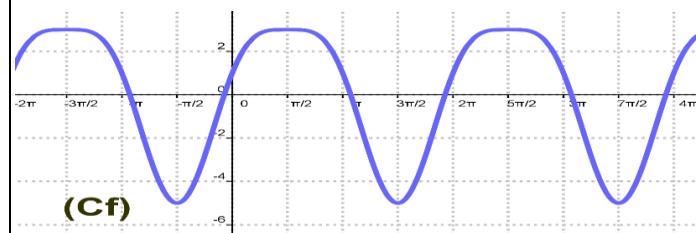
x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f''(x)$	-	0	+	0

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

