

## LA DERIVATION

### A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1)  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est

finie le note  $f'(a)$  :Le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$

2)  $f$  est dérivable en  $a$ ssi  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$  Finie

3) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a+r[$  où  $r > 0$

$f$  est dérivable à droite de  $a$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

existe et est finie :  $f'_d(a)$

2)  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a-r, a]$  où  $r > 0$

$f$  est dérivable à gauche de  $a$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

existe et est finie :  $f'_g(a)$

3)  $f$  est dérivable en  $a$ ssi elle dérivable à droite et à gauche de  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$

4) Toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ .

### B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si  $f$  est dérivable en  $a$ .  $f$  admet une fonction affine tangente en  $a$  de la forme :  $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

2) Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors sa courbe représentative  $C_f$  admet une tangente ( $T$ ) en

$A(a, f(a))$  d'équation :  $(T)$ :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

3) Si  $f$  est dérivable à droite de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de  $a$  :

$(T_d)$ :  $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$  :  $x \geq a$

4) Si  $f$  est dérivable à gauche de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de  $a$  :

$(T_g)$ :  $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$  :  $x \leq a$

5) Si  $f$  est dérivable à droite et à gauche de  $a$  et

$f'_d(a) \neq f'_g(a)$  on dit que la courbe représente un point anguleux en  $A(a, f(a))$

### C) Dérivabilité sur un intervalle.

1)  $f$  est dérivable sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est dérivable en tout point de  $]a, b[$

2)  $f$  est dérivable sur le semi-ouvert  $[a, b[$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$

3  $f$  est dérivable sur le fermé  $[a, b]$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :** La fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### D) Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$

Si  $f$  admet un extremum relatif en  $a$  alors  $f'(a) = 0$

2) Si  $f$  est dérivable en  $a$  et admet un extremum en  $a$ , alors sa courbe représentative

admet une tangente parallèle à  $(Ox)$  en  $A(a, f(a))$

3) Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

4)a)  $f'$  est positive sur  $I$ ssi  $f$  est croissante sur  $I$ .

b)  $f'$  est négative sur  $I$ ssi  $f$  est décroissante

c)  $f'$  est nulle sur  $I$ ssi  $f$  est constante sur  $I$ .

5) Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$

6) Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et sa fonction dérivée est strictement négatif sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

7) Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

Si  $f'$  s'annule en  $a$  en changeant de signe à droite et à gauche de  $a$  alors  $f$  admet un extremum en  $a$

8)  $f$  est deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

a) Si  $f''$  est positive sur  $I$  alors  $C_f$  est convexe sur  $I$ .

b) Si  $f''$  est négative sur  $I$  alors  $C_f$  est concave sur  $I$ .

c) Si  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe alors  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $A(a, f(a))$

### 1) Théorème de Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et telle que :  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f'(c) = 0$ .

### 2) Théorème des accroissements finis T.A.F :

a) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  Alors il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

### b) Inégalité des accroissements finis I.A.F :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  S'il existe deux réels  $M$  et  $m$  tels que :

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in ]a, b[$$

Alors :  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

3) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$

et  $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k)$  (où  $k \in \mathbb{R}^{*+}$ )

Alors :  $(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$