

LA DERIVATION

1) RAPPELLES

1) Activités :

Activité 1 :

- 1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x) = 2x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = 2$.
- 2- Montrer en utilisant la définition que la fonction $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ est dérivable en $a = 1$
- 3- Montrer en utilisant la définition que la fonction $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$ est dérivable en $a = -1$.
- 4- La fonction $u(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est-elle dérivable en $a = 3$.

Activité 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction
$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } a = 1$$

Activité 3 :

- 1- Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x) = |2x^2 - 8| + x + 1$ en $a = -2$.
- 2- Déterminer l'équation de la tangente en $A(0, g(0))$
- 3- Déterminer les équations des demi-tangentes au point $B(-2, g(-2))$
- 4- Présenter les 3 tangentes.

2) Rappelles.

2.1 Définitions et propriété de base

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **ouvert de centre a** .

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :

Si f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ On pose : $h = x - a$ si x tend vers a alors h tend vers 0 et on obtient

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Application :

Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on la note : $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on la note : $f'_g(a)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a .
 f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

2.2 Fonction affine tangente

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a .

Posons :
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

On a : $(x-a)\varphi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$ et par suite :

$$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$$

Posons : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ on aura : $f(x) = u(x) + (x-a)\varphi(x)$

La fonction u est une **fonction affine** et s'appelle **la fonction affine tangente en a** .

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a . f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
 $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Remarques:

- La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a
 On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si on pose $x = a + h$; on aura : $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connaît pas $f(a+h)$ et si h est petit, on peut essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ " à la place de $f(a+h)$.

Exemple :

Si on veut une approximation de **sin3**, on peut prendre :

- $f(x) = \sin x$
- $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu)
- $h = 3 - \pi$ (pour avoir : $3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :

$$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$$

2.3 Interprétation géométrique :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a . f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
 $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice :

Soit $(x) = x^2$, $A(a, f(a))$ un point de C_f ; T est la tangente à C_f en A . La droite T coupe respectivement (Ox) et (Oy) en M et N .

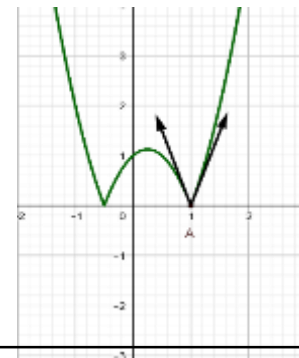
Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

Théorème :

- Si f est une fonction dérivable à **droite** de a , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a (T_d) d'équation : $(T_d) \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$
- Si f est une fonction dérivable à **gauche** de a , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a (T_g) d'équation : $(T_g) \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

Exemple :

$f(x) = |-2x^2 + x + 1|$; On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$ donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.
 $(T_d) \begin{cases} y = 3(x - 1) \\ x \geq 1 \end{cases}$ et $(T_g) \begin{cases} y = -3(x - 1) \\ x \leq 1 \end{cases}$ qu'on peut représenter par :



2.4 Opérations sur les fonctions dérivées :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I . La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur I** .

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
x^2	$2x$	\mathbb{R}
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}^{*+}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R}^{*-}
\cos	$-\sin$	\mathbb{R}
\sin	\cos	\mathbb{R}
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	Sa fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + g' \cdot f$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

3) Dérivation et continuité :

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en a alors elle est continue en a

Preuve :

On a : $f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\varphi(x)$

Où : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\varphi(x)$
 $= f(a)$ car $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$

Donc f est continue en a .

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie ; $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (vérifier le)

Exercice :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+a}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1- Trouver une relation entre a et b afin que la fonction soit continue en 1.

2- Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

II) DERIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$ et a un élément de I .

- Si f est dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$ alors $(g \circ f)$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et pour tout a dans I on a : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

Preuve :

Puisque f est dérivable en a alors : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Et Puisque g est dérivable en $b = f(a)$ alors : $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(b+k) - g(b)}{k} = g'(b)$

On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

On pose $k = f(a+h) - f(a)$

On a : $\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$ car f est continue en a (car elle est dérivable en a)

et $f(a+h) = k + f(a)$ par suite :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} \times \frac{k}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] && \text{car : } k = f(a+h) - f(a) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} \right] \times \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \\ &= g'(f(a)) \times f'(a) \end{aligned}$$

Exercice :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$
2. $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$
3. $h(x) = \tan(\cos x)$

III) DERIVATION DE LA FONCTION RECIPROQUE :

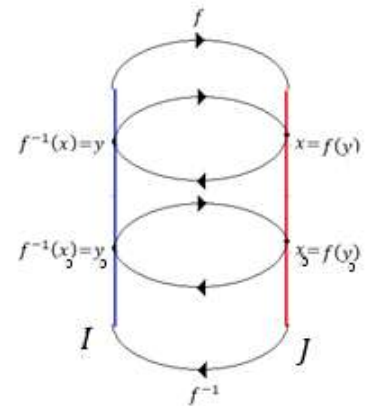
1) Propriété et exemple.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur I et soit f^{-1} sa fonction réciproque de $J = f(I)$ vers I .

On suppose que f est dérivable sur I et que $(\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)$

Montrons que f^{-1} est dérivable sur J .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} && (\text{car } (\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)) \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} && (\text{car quand } x \text{ tend vers } x_0 \text{ on a } y = f^{-1}(x) \text{ tend vers } f^{-1}(x_0)) \\ &= \frac{1}{f'(y_0)} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$



Théorème :

Soient f une fonction continue strictement monotone sur I , et $J = f(I)$ et a un élément de I

- Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.
- Si f est dérivable I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et $(\forall x \in J)(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exemple :

$f(x) = \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$ (Prouver-le)

Et on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

Remarque :

La première assertion du théorème précédent nous permet de trouver $(f^{-1})'(x_0)$ sans savoir l'expression de f^{-1} ; il suffit de connaître $f^{-1}(x_0)$.

Exercice :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 + x^2$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice corrigé :

Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Montrer que g est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $] -1, 1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0, \frac{\pi}{2}[) (g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $] -1, 1[$.

Correction :

1- g est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \leq 0$
- Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \geq 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	0	−	0
$g(x)$	1	−1	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $g(]0, \frac{\pi}{2}[) = \left[\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[=] -1, 1[$

Donc g est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $] -1, 1[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

3- On a : g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[) (g'(x) = -2\sin(2x) \neq 0)$ donc g^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.

Soit $x \in] -1, 1[$; $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$$= \frac{1}{-2\sin(2g^{-1}(x))}$$

$$(\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[) (\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2(2\alpha)})$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - \cos^2(2(g^{-1}(x)))}}$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - (g(g^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

2) La dérivée de la fonction arctan

Activité :

1- Montrer que la fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} .

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) (\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2})$

Propriété :

La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \right)$

Corolaire :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I .

Si u est dérivable sur I alors $\arctan(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I) \left((\arctan(u(x)))' = \frac{1}{1+(u(x))^2} \right)$

Preuve (En exercice)

Exercice :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

1- Montrer que f est une constante sur $]0, +\infty[$, et trouver $f(x)$ pour x dans $]0, +\infty[$.

2- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctan(2x^2+x+1) - \frac{\pi}{2}}{2\arctan(x) - \pi} \right)$.

3) La dérivée de la racine n-eme

Activité :

1- Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \right)$

3- Soit u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I .

a) Montrer que $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I .

b) Montrer que $(\forall x \in I) \left((\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}} \right)$

Propriété 1 :

Soit n un entier naturel non nul

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) \left((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \right)$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I) \left((\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}} \right)$

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$$

$$g(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$$

Exercice 2 :

Déterminer la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^4+1} - \sqrt[4]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x+1}}$

Propriété 2 :

Soit r un nombre rationnel

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) ((x^r)') = r x^{r-1}$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction u^r est dérivable sur I et $(\forall x \in I) ((u(x))^r)' = r u'(x) \cdot (u(x))^{r-1}$

Exercice :

Soit la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt[3]{1-x^3}) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3- Soit g la restriction de la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}[= I$

a) Déterminer l'intervalle J image de I par g

b) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} et que g^{-1} est dérivable sur J .

c) Montrer que : $(\forall x \in J) ((g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2})$

d) En déduire $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J .

4- Etudier les variations de f sur $] -\infty, 0[$.