CONTINUITÉ

Exercice

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1-2\sin x\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}$; $x\neq\dfrac{\pi}{4}$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1) transformer $\sin x\sin 3x$ en somme et $\cos x+\cos 3x$ en produit

2) en déduire que f est continue en $a=\dfrac{\pi}{4}$

Exercice

Soit la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{(1-x)\sqrt{1+2x}-1}{x^2}$; $x\neq 0$ et $f(0)=-\dfrac{3}{2}$

1) calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$

2) en déduire que f est continue en $a=0$

Exercice

f est une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$; $x\neq 0$ et $f(0)=-2$

1) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) montrer que f continue en $a=0$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\left(x-E\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right)\sin x$

1) montrer que $(\forall a\in\mathbb{R}^*)$ $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{a}{x}\right)=a$

2) montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 à déterminer

Exercice

a et b deux réels . soit la fonction f telle que :

$f(x)=x$; $x\leq 2$ و $f(x)=a-\dfrac{b}{x}$; $2<x\leq 4$ و $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $x>4$

1) étudier la continuité de f sur على المجالات $]-\infty,2[$; $]2,4[$ et $]4,+\infty[$

2) déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

CONTINUITÉ

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+3x^2}\cos(x)}{x^2}$; $x\neq 0$ et $f(0)=-1$

1) calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+mx^2}-1}{x^2}$ (m un paramètre strictement positif)

2) prouver que f م est continue en $a=0$

Exercice

On considère la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{xE(x)+2}{x+1}$

1) a) déterminer $f(1)$ et montrer que f est continue à droite de $a=1$

b) f est-elle continue en $a=1$?

2) a) calculer $f(0)$ et montrer que f est continue à droite de $b=0$

b) f est-elle continue en $b=0$?

Exercice

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x}{x^2}$

2) en déduire les limites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\times\sqrt[3]{1+3x}-1-2x}{x^2}$

Exercice

1) montrer que l'équation $x^3-x^2-x-1=0$ admet une seule solution α et $1<\alpha<2$

2) en déduire la solution de $\sqrt[3]{x+\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$

Exercice

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}$ ، $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(\pi\left(x^2+x-12\right)\right)}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\sqrt[3]{x^2-1}-2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt{x^3-2}-10}$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{32}-\sqrt{2-x^2}\sqrt[3]{1+\cos x}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}\sqrt[3]{1+\cos x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\arctan\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1-\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\arctan 2x-\arctan\sqrt{x^2+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$

CONTINUITÉ

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - \cos x$

1) étudier le sens des variation de f

2) montrer que $f(x) = \frac{\pi}{6}$ admet une unique solution α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

3) lequel des intervalles $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ contient α

4) déterminer un encadrement de α d'amplitude $\frac{\pi}{8}$

Exercice

1) soit la fonction f définie sur $I = \left]-1, 1\right[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

a) calculer les limites de f et étudier les variations de f

b) montrer que f est une bijection de I vers J à déterminer

c) exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

2) soit F la fonction définie sur I par : $F(x) = \arctan\left(f(x)\right)$

a) dresser le tableau de variation de F

b) montrer que F est bijective de I vers K que l'on déterminera

c) exprimer $F^{-1}(x)$ pour tout x de K

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice

On considère la fonction f définie sur $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sin^2 x$

1) Montrer que f réalise un bijection de D vers I à déterminer

2) prouver que $(\forall x \in I)$ $f^{-1}(x) = \arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$