

LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice (1)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{x+1} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x - \tan^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x + 1}{x^{p+1} - x^p + x - 1} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + a - x}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a^2 - x^2}} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} E\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + \sqrt{x})\sqrt{2-x} - 3}{x^2 - 1}$$

Exercice (2)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 \left(E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{2}{x}\right) \right)$

- montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad 3x - 2x^2 < f(x) \leq 3x$
- déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

exercice (3)

on considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$

- déterminer le domaine de définition de f
- a) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$
b) f admet-elle un prolongement par continuité en $a = 0$
- montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice (4)

Soit k un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$. on considère la fonction f définie par : $f(x) = xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

- résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- a) montrer que $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right[\right) \quad f(x) = x$ et déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$
b) calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$
- montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$
- a) montrer que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2} \right] \right) \quad f(x) = (k-1)x$
b) étudier la limite de f au point $\frac{1}{k^2}$

LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice (1)

Montrer que : $\arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$; $4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) = \arctan \left(\frac{120}{119} \right)$

$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$; $\arctan 2016 - \arctan \frac{2015}{2017} = \frac{\pi}{4}$

Exercice (2)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{\sqrt{2x-1}} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\arctan \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\pi}{4} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\arctan |x| - \frac{\pi}{4}}}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+x+3} - \sqrt{2x+5}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt[4]{x^4+1} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \sqrt[4]{x^4+1} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{x^4+60}}}$$

Exercice (3)

Résoudre les équations suivantes

$$1) \arctan x + \arctan x^2 = -\frac{\pi}{4} \quad 2) \sqrt[3]{x - \sqrt{x+1}} = \sqrt{x}$$

$$3) \sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2} \quad 4) \frac{\sqrt[n]{x+3}}{x} + \frac{\sqrt[n]{x+3}}{3} = \frac{\sqrt[n]{x}}{5}$$

Exercice (4)

Soit la fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \sin x$

- montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera
- soit f^{-1} la réciproque de f montrer que $(\forall x \in]-1, 1[) \quad f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Exercice (5)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 \arctan \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

- déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f
- soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$
 - montrer que g est bijective de I vers J que l'on déterminera
 - montrer que $(\forall x \in I) \left(\exists ! \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \sqrt{x} = \tan \alpha$ puis définir la fonction g^{-1}
- montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution β unique dans
- tracer dans le même repère les deux courbes (C_f) et $(C'_{g^{-1}})$