Limites et continuité

1 la continuité en un point.

Définition :

soient f une fonction numérique définie sur un intervelle ouvert I et $a \in I$.
On dit f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition :

soit f une fonction numérique définie sur un intervelle de type $[a, b]$.
$\star$ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
$\star$ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Proposition :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } a$$

Remarque :

la partie entière n'est pas continue en tout n de $\mathbb{Z}$.

2 la continuité sur un intervalle.

Définition :

$\star$ on dit que f est une fonction continue sur un intervelle ouvert I s'elle est continue en tout point de I.
$\star$ on dit que f est une fonction sur un intervelle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Remarques :

$\star$ la partie entière est continue sur l'intervalle $[n, n+1[$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.
$\star$ si f est continue sur un intervalle I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Proposition :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leur domaine de définition.

3 Les opérations sur les fonctions continues.

Proposition :

soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\star$ les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .
$\star$ si de plus g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I .

Proposition :

$\star$ si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.
$\star$ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

4 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition :

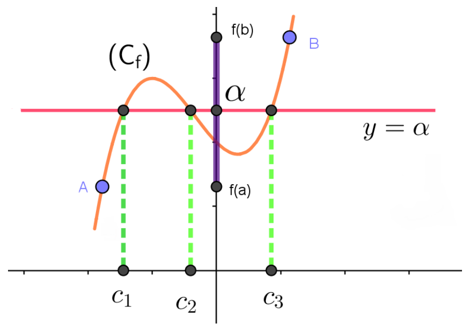
⋆ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
⋆ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I	$f(I)$ si f est continue et str $\nearrow$	$f(I)$ si f est continue et str $\searrow$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(a)]$
$]a,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty,b]$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a,b\in I$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c)=\alpha$.
(autrement l'équation $f(x)=\alpha$ admet au moins une solution)



Corollaire :

soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un unique $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\alpha$.
(autrement l'équation $f(x)=\alpha$ admet une unique solution sur $[a,b]$)

Corollaire :

soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$. Alors :
⋆ l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]a,b[$.
⋆ si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]a,b[$.

La méthode de dichotomie :

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x)=0$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$, alors $\exists!\alpha\in]a,b[/f(\alpha)=0$.
On a deux cas :

⋆ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\times f(b)<0$ alors $\alpha\in\left]\dfrac{a+b}{2},b\right[$.

⋆ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\times f(a)<0$ alors $\alpha\in\left]a,\dfrac{a+b}{2}\right[$.

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α.

5 La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Définition :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.
La fonction qui lie chaque élèment y de J avec l'unique élèment x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1}.

Conséquences :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

$\star$ $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$ $\quad\star$ $(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$ $\quad\star$ $(\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$

Proposition :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :
$\star$ f^{-1} est continue sur $f(I)$.
$\star$ f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ avec f et f^{-1} ont la même monotonie.
$\star$ $(C_{f^{-1}})$ est symetrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

6 La fonction racine $n^{ième}$.

Proposition :

soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{\ }$.

Conséquences :

$$\star \quad \sqrt[n]{\ } : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \to & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$\star$ $(\forall x, y \in [0, +\infty[) :\ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

$\star$ $(\forall x \in [0, +\infty[) :\ (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

Définition :

Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ :\ x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

Propriétés :

$\star$ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
$\star$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \qquad \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$$

7 La fonction arctan.

Proposition :

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté arctan.

Propriétés :

⋆ La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

⋆ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad \tan(\arctan(x)) = x$

⋆ $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \quad \arctan(\tan(x)) = x$

⋆ $(\forall x \in \mathbb{R}); \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \quad \arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$

⋆ $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

⋆ la courbe (C_{arctan}) :