LIMITE ET CONTINUITE

I) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activité et rappelles

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{sin7x}{tan3x} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{cosx} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2cos^2x+cosx-3}{1-cos^2x}$$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{\sqrt{x^2+3}-2} & ; si\ x\neq 1 \\ f(1)=14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) Comparer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

Activité 3 :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right) & ; si\ x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$ (E désigne la partie entière)

1- Déterminer D_f

2- Déterminer : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} g(x)$

3- g est elle continue en $x_0 = 0$?

1.2 Rappelle

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

2 Définition et exemples

Définition :

Soit f une fonction définie **sur un intervalle de centre a**. On dit que la fonction f est **continue** en a si :

elle admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0\leq|x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Exemples :

❶ Montrer en utilisant la définition que $g(x) = 3x + 1$ est continue en a (a un réel quelconque).

❷ Montrer en utilisant la définition que $h(x) = x^2 + 1$ est continue en 1

❸Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} & ; si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 + x - 10} & ; si\ x < 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 2$

3- Interprétations graphiques

3.1 Activité :

Activité 1:

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1 \\ x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

1- Déterminer $f(1)$ et étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$

2- Représenter graphiquement la fonction f.

Activité 2 :

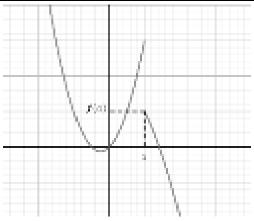
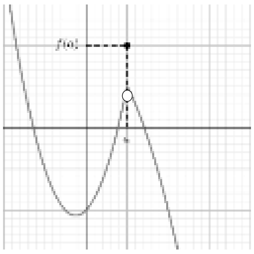
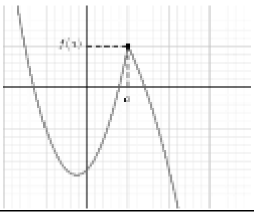
Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$ $et\ h(-1) = 3$

1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$

b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction h.

3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	• f est définie en 1 • f n'admet pas de limite en 1 • f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}; f(1) = 2$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ • f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ • f est continue en a

Exercice :

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

4) Prolongement par continuité

Activité :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

2- Déterminer la limite $\lim_{x\to -1} h(x)$, h est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction $\bar{h}$ définie par : $\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x) \text{ si } x \neq -1 \\ \bar{h}(-1) = 3 \end{cases}$

a) Déterminer $D_{\bar{h}}$

b) Etudier la continuité de la fonction $\bar{h}$ en x_0=-1

La fonction $\bar{h}$ s'appelle **un prolongement par continuité de la fonction h en -1**

4- Peut-on prolonger h par continuité en $a = -2$

Théorème et définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (finie)

La fonction $\bar{f}$ définie par : $\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x); & \text{si } x \neq a \\ \bar{f}(x) = \lim_{x\to a} f(x) = l \end{cases}$ est une fonction **continue en a et** c'est **un prolongement de la fonction f en a.**

La fonction $\bar{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

II) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

Introduction

Dans l'exercice prrécedent où f était définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} & ; si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2 + x - 10} & ; si\ x < 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{9} & \end{cases}$$

On a trouvé que : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{9} = f(2)$; on dit que **la fonction f est continue à gauche** de 2 et $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \frac{1}{9} = f(2)$ on dit que **la fonction f n'est pas continue à droite** de 2.

1.2 Définitions

Définition

❶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ (où > 0)

On dit que la fonction f est **continue à droite de a** si : f admet une limite finie à droite de a et $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

❷ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ (où > 0)

On dit que la fonction f est **continue à gauche de a** si : f admet une limite finie à gauche de a et $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Preuve : (En exercice)

Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-x-2}{|4x-3|-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+12}-4} & \text{si } x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2+\alpha x-\alpha+1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ g(2) = l \end{cases}$

Existent-t-il α et l pour que g soit continue en 2 ?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

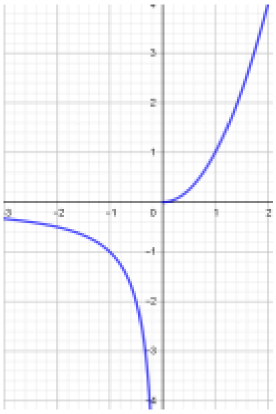
Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

Remarque :

- ✓ Si une fonction f est continue sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ elle est continue sur $[a,c]$
- ✓ En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I\cap J\neq\emptyset$ alors f est continue sur $I\cup J$.
- ✓ f peut-être continue sur $[a,b[$ et sur $[b,c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a,c]$
  Dans le graphique ci-dessous f estcontinue sur $[-3,0[$ et continue sur $[0,2]$ mais pas continue sur $[-3,0]$ car elle n'est pas continue en 0

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x} \text{ si } x<0 \\ f(x)=x^2 \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$$



2) Opérations sur les fontions continues

2.1 Rappelles sur les opérations sur les limites finies

Propriété :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$
- $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$
- $\lim\limits_{x\to a}(|f|)(x)=|l|$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'}$ $\quad l'\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$ $\quad l'\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{f})(x)=\sqrt{l}$ $\quad l>0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

Propriété :

①Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

- $f+g$
- $f\times g$
- $|f|$

sont des fonctions continues en a

② Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a)\neq 0$ alors

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

sont des fonctions continues en a.

③ Si f une fonction continue en a et $f(a)\geq 0$ alors :

- $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque :

La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

Une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Et puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto kx^n$ et par suite

Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

❶ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

❷ $g(x) = \frac{4x^3+x+1}{x^2+2x-3}$ est continue sur $]-\infty, -3[$; sur $]-3,1[$ et sur $]1, +\infty[$.

❸ La fonction tan est continue sur tous le intervalles de la forme : $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi\, ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

2.3 Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème :

> Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I.
>
> ① Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.
>
> ② Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

Preuve : (En utilisant la définition)

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(gof)(x) - (gof)(x_0)| < \varepsilon$

On a g est continue en $f(x_0)$ donc :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \beta > 0)(|t - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(t) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (R)$

et puisque $f(I) \subset J$ donc : $(\forall x \in I)(f(x) \in J)$ (on pose $t = f(x)$ dans (R)) on obtient :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \beta > 0)(|f(x) - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad$ (*)

Pour $\beta > 0$ $(\exists \alpha > 0)$ $(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$ (car f est continue en x_0)

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad$ (*) C.Q.F.D

Exemples :

$f(x) = sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc
- $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$
- sin est continue sur $\mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{sin^2 x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (justifier la réponse)

Exercice : Montrer que $h(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

3) Limite de vou

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$; si v est continue en l alors $\lim\limits_{x \to x_0} (vou)(x) = v(l)$

Preuve :

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité $\bar{u}$ définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x)\,;\text{si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction $\bar{u}$ étant continue en x_0; et v est continue en $l = \bar{u}(x_0)$ alors et d'après le théorème de la composition $(vo\,\bar{u})$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x \to x_0} (vou)(x) = \lim_{x \to x_0} (vo\bar{u})(x) = (vo\bar{u})(x_0) = v(\bar{u}\,(x_0)) = v(l)$$

Application :

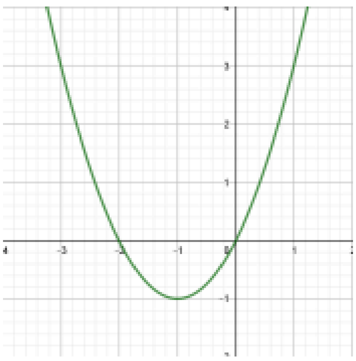
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\pi \frac{sin4x}{3x}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\pi x\left(1 - cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité :



Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3,-1]$; $I_3 = [-3,1]$

2- Montrer algébriquement que $f([-3,1]) = [-1,3]$

Rappelle :

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y \end{cases}$$

Théorème : (Admis)

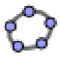
L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

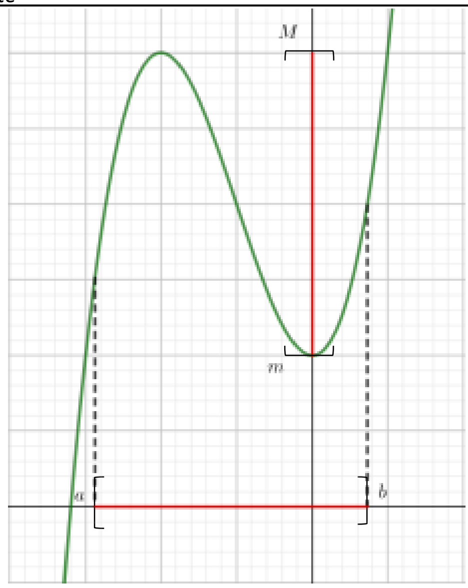
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$f([a,b]) = [m,M]$$



continuitéiamgeintervalle.ggb



Cas particulier :

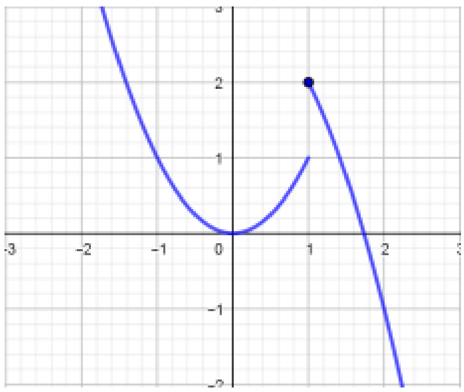
- Si f est continue croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
- Si f est continue décroissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

Remarque :

La continuité dans le théorème précèdent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre f n'est pas continue mais

$$f([0,2]) = [f(2), f(1)] = [-1,2]$$



2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis)

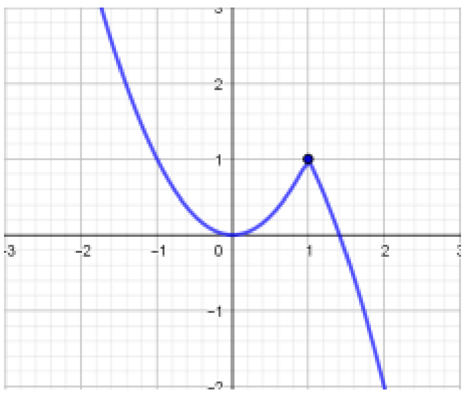
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

Dans le cas de la courbe ci-contre on a :

$f(]0,2]) = [-2,1]$



2.2 Cas d'une fonction strictement monotone :

L'intervalle I	$f(I)$: f strictement croissante	$f(I)$: f strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété $\boldsymbol{f(I_1\cup I_2)=f(I_1)\cup f(I_2)}$.

Exercice :

1- Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x)=2x^2-3x^2$

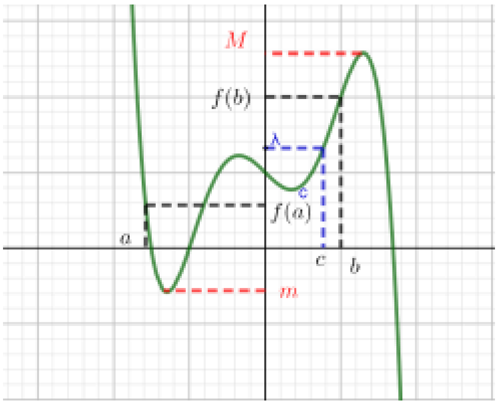
2- Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1,0]$; $[1,2]$; $[-1,2[$; $[0,+\infty[$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

1) Le théorème :

1.1 Cas général

Preuve :



Rappelons que : $f(I)=J \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x\in I)(f(x)\in J) \\ (\forall y\in J)(\exists x\in I)(f(x)=y \end{cases}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que : $a<b$.

On sait que $f([a,b])=[m,M]$ où $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

On a donc $f(a)\in[m,M]$ et $f(b)\in[m,M]$.

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc : $\lambda\in[m,M]$ et puisque $f([a,b])=[m,M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a,b]$.

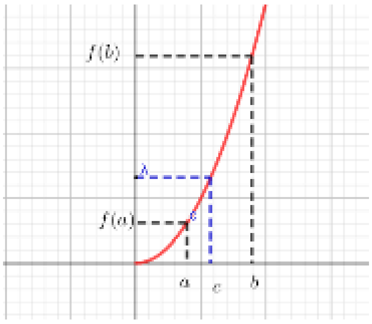
D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Théorème T.V.I :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$

1.2 Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)



> Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$.
>
> Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul
>
> $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Remarque :

L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$ "

peut-être formulée comme :

" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=\lambda$ admet une solution unique dans $[a,b]$

Corolaire1 (T.V.I) :

> Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
>
> Si $f(a)\times f(b)<0$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=0$

Preuve :

$f(a)\times f(b)<0$ veut dire que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

On prend $\lambda=0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

> Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$.
>
> Si $f(a)\times f(b)<0$ il existe un et un seul c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=0$

2) Applications :

Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3+x-1=0$ admet une racine unique dans [0,1]

2- Montrer que l'équation $x^3+x-1=0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

Activité :

Soit $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

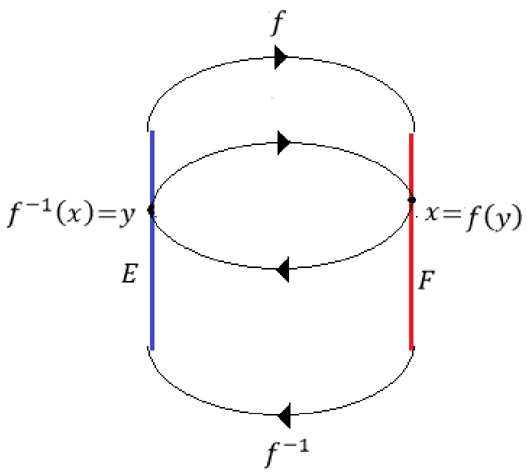
1- Montrer que pour tout y dans $I=[0,+\infty[$, l'équation $f(y)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle $J=]0,1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f **admet une fonction réciproque de** $J=]0,1]$ **vers** $I=[0,+\infty[$

Remarque :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in E \end{cases}$$



On a :

$$(\forall x \in F)(f o f^{-1}(x) = x)$$

$$(\forall x \in E)(f^{-1} o f(x) = x)$$

2) Théorème et applications

2.1 Le théorème

Théorème :

> Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

Preuve :

Puisque f est continue et strictement monotone alors l'image de l'intervalle I l'intervalle $J = f(I)$

donc f est surjective par construction car $(\forall x \in J = f(I))(\exists y \in \mathrm{I})(f(y) = x)$

Montrons que f est injective de I vers $f(I)$

On suppose pour la démonstration que f est strictement croissante (même démonstration si f est strictement décroissante)

Soient y_1 et y_2 deux éléments distincts de I (On suppose que $y_1 > y_2$)

On a donc (puisque f est strictement croissante) $f(y_1) > f(y_2)$ donc $f(y_1) \neq f(y_2)$ et finalement f est injective

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

2.2 Application :

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 3 :

Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que h est une bijection de $]-1,1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ pour x dans J.

2.3 Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 :

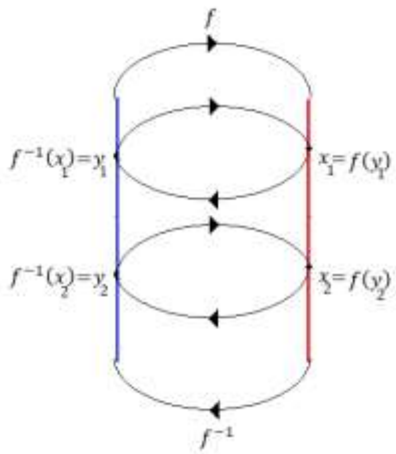
Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Preuve :

$$T_{f^{-1}/_J} = \frac{f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{y_1-y_2}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$= \frac{1}{T_{f/_I}} \quad (T_{f/_I} \neq 0 \ f \text{ est strictement monotone})$$



Donc le taux de f^{-1} sur J à le même signe que le taux de f sur I

Et on conclut.

Propriété 2 :

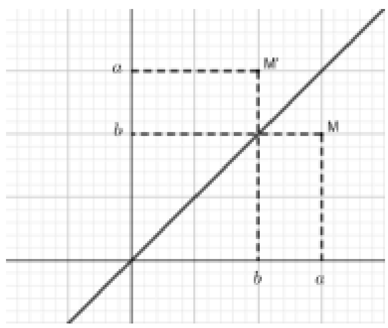
Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à :

$(\Delta)\ y = x$

Rappelles :

①$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$

②Dans un repère orthogonal si on a un point $M(a,b)$ son symétrique par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$ est le point $M'(b,a)$.



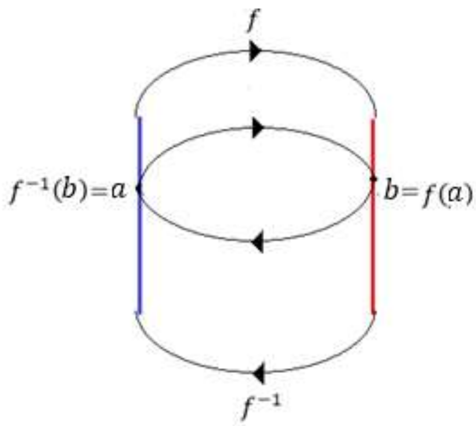
Preuve d'une propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I.

C_f et $C_{f^{-1}}$ sont les courbes respectives de f et de f^{-1}.

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe C_f son symétrique par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$ est le point $M'(f(a), a)$.

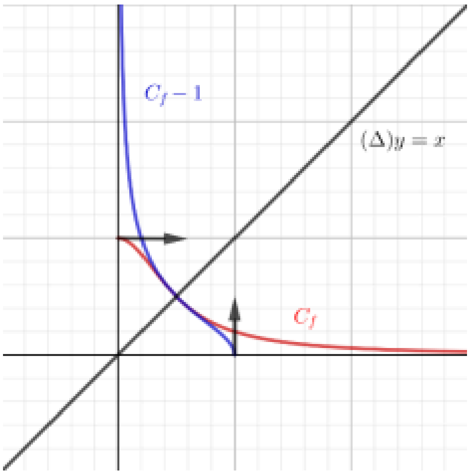
Or : $\begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases}$ donc $M'(b, f^{-1}(b))$ d'où $M' \in C_{f^{-1}}$



Propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I. C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$

A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…



3) La fonction racine n – éme

3.1 Définition et règles de calculs

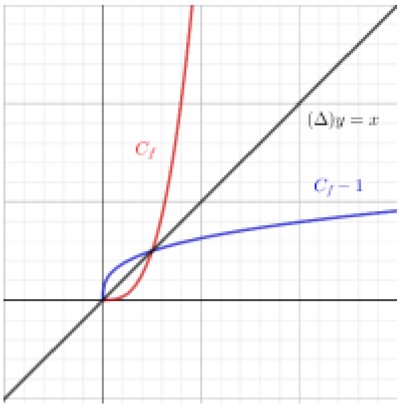
Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction u: $x \mapsto x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque u^{-1} de $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.
La fonction réciproque u^{-1} s'appelle la fonction racine $n - éme$ et se note $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$
- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N})(\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$



Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \left(\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\ \left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}\right)$ (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left(\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}\right)$ (à prouver)

Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[2]{x} = \sqrt{x})$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})(\sqrt[1]{x} = x)$

L'équation $x^n = a$

- $x^n = a$
  - n pair
    - $a \geq 0$ → $S = \{\sqrt[n]{a}; -\sqrt[n]{a}\}$
    - $a < 0$ → $S = \emptyset$
  - n impair
    - $a \geq 0$ → $S = \{\sqrt[n]{a}\}$
    - $a < 0$ → $S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3 = -27$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$.

3.2 L'expression conjuguai et ses applications

Ordre 3 :

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Il en résulte : $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ et $a + b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

Applications :

① Rendre le dénominateur rationnel :

$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

② Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}$

D'ordre 4 :

On sait que : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte que : $a - b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Et par suite :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}\right)}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser : $a^4 + b^4$

Applications :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$

4) Puissance rationnelle :

4.1 Puissance entier

Rappelle :

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots . \times x}_{n\, fois}$ et $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$

Pour $x \neq 0$ on a $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

4.2 Puissance rationnelle

Propriété :

Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier non nul q on pose : $\sqrt[q]{x} = x^{\left(\frac{1}{q}\right)}$

Preuve : (en exercice)

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel $(r \in \mathbb{Q})$; $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$x^r = x^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r\times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exercice 1 :
Démontrer 1 et 2
Exercice 2 :
Comparer les nombres $a = \sqrt[3]{5}$ et $b = \sqrt[4]{20}$

Application aux calculs des limites.

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{2x^2+3x}-\sqrt[4]{3x^3+x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^2+3x}-2\sqrt[3]{x^2-x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[p]{x^q+1}-\sqrt[q]{x^p+1}$ (discuter suivant les valeurs de p et q)

5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tanx$ et $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tanx$

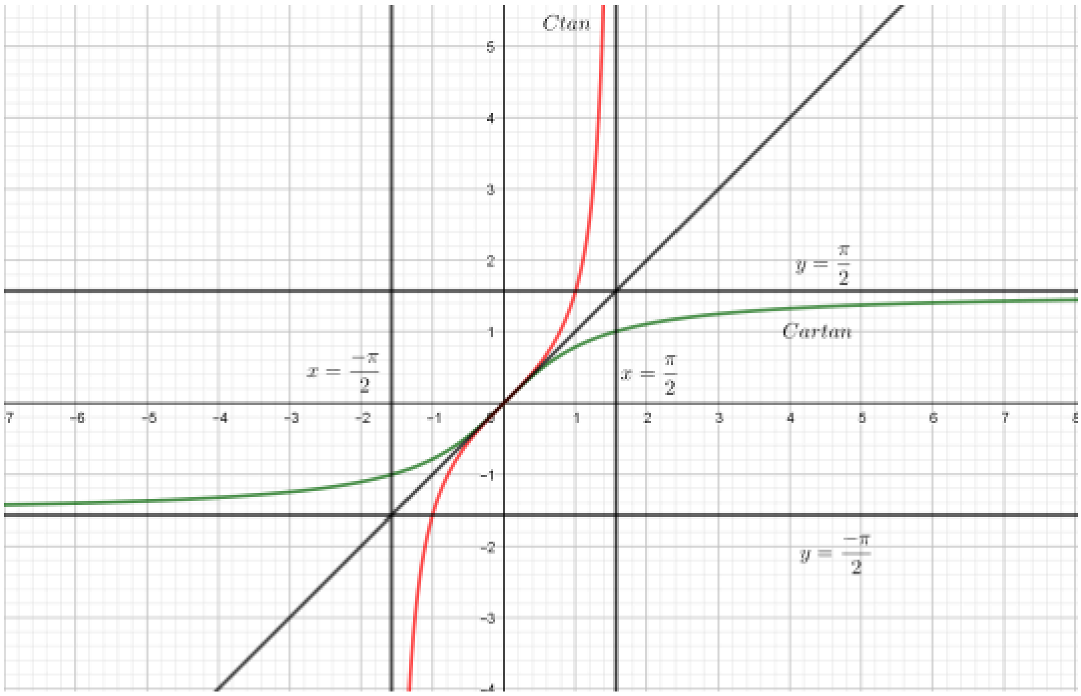
2- Montrer que la restriction de la fonction tan sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$est une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$vers $\mathbb{R}$.

Propriété et définition :

La restriction de la fonction tan sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente** , notée : $\boldsymbol{artan}$ elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

La courbe de la fonction $\boldsymbol{arctan}$:



Résultats :

① $\begin{cases} arcta\ x = y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\tan y \\ y\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

② $\lim_{x\to+\infty} arc\tan x=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} arc\tan x=\frac{-\pi}{2}$

③ $(\forall x\in\mathbb{R})(\tan(arctan\ x)=x)$ et $\left(\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)(\arctan(tan\ x)=x)$

④ La fonction $artan$ est impaire strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

⑤ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\left(\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\left(\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2}\right)$ (Propriété à démontrer)

Exercice 1 :

Déterminer les réels suivants:

$$a = Arctan\left(tan\left(-\frac{3\pi}{22}\right)\right) \; ; \quad b = Arctan\left(tan\left(\frac{144\pi}{4}\right)\right) \quad ; \quad c = tan(Arctan\sqrt{123})$$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in]-1,1[$

1- Montrer que: $arctan\, a + arctan\, b = arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

2- Etudier le cas où $a > 1$ et $b > 1$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$arctan\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) + arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. 1- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{Arctanx-1}{4x-\pi}$ 2- $\lim\limits_{x \to +\infty} x(2arctanx - \pi)$ 3- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{Arctan(2x^2+x)}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}\right)$