Résumé de Cours : Limite et continuité

PROF: ATMANI NAJIB

fonctions continues

2BAC SM BIOF

Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans R et a un réel élément de I.
f est continue en a si et seulement si :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$: C'est-à-dire :

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in Df)(0\leq|x-a|<\alpha\Rightarrow$
$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Continuité à droite et à gauche

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r>0$

On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a

et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$:

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r;a]$ où $r>0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a

et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

3) Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0=0$ ssi

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans R.
f est continue sur I si et seulement si f est continue en chaque réel a de I.
Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe « se trace sans lever le crayon ».

Prolongement par continuité

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ (finie)

La fonction $\bar{f}$ définie par : $\begin{cases} \bar{f}(x)=f(x);si...x\neq a \\ \bar{f}(a)=l \end{cases}$

Est une fonction continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemples de fonctions continues

• les fonctions polynômes sont continues sur R ;
• les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition • les fonctions exponentielles sont continues sur R ;
• les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont continues sur]0, +∞ [;
• les fonctions racines n-ème sont continues sur [0, +∞ [;
• les fonctions sinus et cosinus sont continues sur R, la fonction tangente est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de la forme π/2+ kπ, k ∈ Z.
• la fonction valeur absolue est continue sur R ;
• toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.
• La fonction partie entière est une fonction définie sur R et discontinue en certains réels (et donc non continue sur R).

Opérations sur les fonctions continues

1)Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :a) $f+g$ b) $f\times g$ c) $|f|$
Sont des fonctions continues en a

2)Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a)\neq 0$ alors :a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a.

3) Si f une fonction continue en a et $f(a)\geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Image d'un intervalle.

1)L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2) si $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$f([a;b])=[f(a);f(b)]$ et $f([a;b[)=\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$

$f(]a;b])=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x);f(b)\right]$ et $f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$

3) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement décroissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$f([a;b])=[f(b);f(a)]$ et $f([a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x);f(a)\right]$

$f(]a;b])=\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)\right[$ et $f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b),

il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.

2)Soient a et b deux réels tels que a < b.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a, b].
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b),
L'équation f(x) = k a une solution unique dans [a, b].
Ces résultats se généralisent à des intervalles du type [a, b[,]a, b],]a, b[, [a, +∞[,] − ∞, b[, . . . en remplaçant f(a) ou f(b) par la limite de f en la borne manquante.

3)Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a, b].Si f(a)f(b) < 0, l'équation f(x) = 0 a une solution unique dans [a, b].

FONCTIONS RECIPROQUES.

1)Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

2)Si f admet une fonction réciproque f^{-1}de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

3) Si f admet une fonction réciproque f^{-1}de $J = f(I)$ vers I alors $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$

La fonction racine n − *éme*

1)Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction : $f : x \to x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$et La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n − $éme$ et se note $\sqrt[n]{\ }$

Propriétés de la racine n − éme

1)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur ℝ+

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3)(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur ℝ+ strictement croissante.

5)(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6)(∀x ∈ ℝ+) (∀a ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

7)(∀a ∈ ℝ+) $\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$

8)(∀x ∈ ℝ+)$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

9)(∀x ∈ ℝ+)(∀p ∈ ℕ) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$ 10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

11)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

12)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

13) $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ et $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$

L'expression conjuguai et ses applications

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

et $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ Il en résulte :

$a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ et $a + b = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$

Par suite :(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ∗+)

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ∗+)

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

On sait que $a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$

Par suite :(∀x ∈ ℝ+)(∀y ∈ ℝ∗+)

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

La fonction arctangente :

1)La restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers ℝ.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : ***artan*** elle est définie de ℝ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} ar\tan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} ar\tan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ar\tan x = -\frac{\pi}{2}$

3)(∀x ∈ ℝ)(tan($arctan$ x) = x)

et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ arctan(tan x) = x

4)La fonction $artan$ est continue et impaire strictement croissante sur ℝ

5) $ar\tan x = ar\tan y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$ar\tan x \prec ar\tan y \Leftrightarrow x \prec y \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ar\tan x}{x} = 1$

7) (∀x ∈ ℝ+) ($arctan$ x + $arctan$ (1/x) =π/2)
et (∀x ∈ ℝ−) ($arctan$ x + $arctan$ (1/x) =−π/2)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien