الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2022
– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | NS 24F

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب - خيار فرنسية	المعامل	9

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……….……………..…(10 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.........…(3.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique …………….......(3 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(10 points)

0.25 **A**-1- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0,+\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[\ ; \quad f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3}$

où $g(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que : $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

0.5 **C**–1- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in [0;1]$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

D- Pour tout $x\in I$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0.5 1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in I$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=2\ln 2-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0.5 b) Calculer $\lim_{x\to 0^+}F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)\,dt=2\ln 2-1$

0.5 c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$

E- On pose : pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k=f(k)-\int_k^{k+1}f(t)\,dt$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\Delta_k$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall k\in\mathbb{N})\ ;\quad 0\le\Delta_k\le f(k)-f(k+1)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\quad 0\le S_n\le\frac{1}{2}$

0.25 2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

0.25 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

0.25 c) Montrer que la limite l de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2}-2\ln 2\le l\le\frac{1}{2}$

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un **nombre complexe non nul** donné et $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_m)\ :\ z^2+mj^2z+m^2j=0$$

0.5 1- Vérifier que : $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$

0.25 2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta=\left[m(1-j)\right]^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 3- Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$

0.25 1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0.75 a) Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

0.25 b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0.5 c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 :(3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{Z}^2$ et soit p **le plus petit diviseur premier** de n

0.25 1-a) Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n \ [p]$

0.25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25 c) En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \ [p]$

0.5 2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

3- On suppose que n est impair.

0.5 a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

0.5 c) On pose : $v' = -(v + nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

0.5 d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

0.25 1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 b) Vérifier que pour tout a,b,c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$$

0.5 c) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \varphi(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$$

0.5 Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3- Soit $M(a,b)\in E$

0.25 a) Montrer que $M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2).I$

0.5 b) Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))=1$

0.5 c) On suppose que $\varphi(M(a,b))=1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse.

0.25 4-a) Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \varphi(M(a,b))=0 \Leftrightarrow a=b=0$

0.25 b) En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

0.25 c) Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN