



الصفحة	2	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

**EXERCICE1** : (12 points)

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(On prendra  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ )

**Partie I :**

- 0.5 1-a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.5 b) Montrer que la courbe  $(C_n)$  admet, en  $-\infty$ , une asymptote  $(\Delta_n)$  dont on déterminera une équation cartésienne.
- 0.5 2-a) Montrer que la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :
- $$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$
- 0.5 c) En déduire le sens de variation de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$   
(On distinguera les deux cas :  $n=0$  et  $n \geq 1$ )
- 0.5 3-a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $(C_n)$  au point  $I$  d'abscisse 0
- 0.5 b) Montrer que le point  $I$  est le seul point d'inflexion de la courbe  $(C_n)$
- 0.5 4- Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes  $(C_0)$  et  $(C_2)$ .
- 5- Pour tout réel  $t > 0$ , on pose  $A(t)$  l'aire du domaine plan limité par  $(C_n)$  et les droites d'équations respectives :  $y = nx - 2$ ,  $x = 0$  et  $x = t$
- 0.5 a) Calculer  $A(t)$  pour tout  $t > 0$
- 0.5 b) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

**Partie II :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f_0(u_n)$$

- 0.5 1-a) Montrer que l'équation  $f_0(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 0.5 2-a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

0.5 b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0.5 c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha$

### Partie III :

On suppose dans cette partie que  $n \geq 2$

0.5 1- a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $x_n$  solution de l'équation  $f_n(x) = 0$

0.5 b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $0 < x_n < 1$

(On prendra  $\frac{2e}{1+e} < 1.47$ )

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 b) En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante.

0.5 c) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est convergente.

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left( \frac{2e}{1+e} \right)$

0.5 b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$

0.5 4-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $x_n \leq x_2$

0.5 b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$

### EXERCICE2 : (4 points)

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres complexes non nuls tel que :  $a + b \neq c$

0.5 1-a) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$(E) : z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$$

0.5 b) On suppose dans cette question que :  $a = i$ ,  $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les trois points  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  qu'on suppose non alignés.

Soient  $P(p)$  le centre de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  qui transforme  $B$  en  $A$

et  $Q(q)$  le centre de la rotation d'angle  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  qui transforme  $C$  en  $A$

et  $D(d)$  le milieu du segment  $[BC]$

الصفحة	4	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

- 1 a) Montrer que :  $2p = b + a + (a - b)i$  et  $2q = c + a + (c - a)i$
- 0.5 b) Calculer :  $\frac{p - d}{q - d}$
- 0.5 c) En déduire la nature du triangle  $PDQ$
- 3- Soient  $E$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $P$  et  $F$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $Q$  et  $K$  le milieu du segment  $[EF]$
- 0.5 a) Montrer que l'affixe de  $K$  est  $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$
- 0.5 b) Montrer que les points  $K$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $D$  sont cocycliques.

### EXERCICE3 : (4 points)

**Partie I :** On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E)$  :  $47x - 43y = 1$

- 0.25 1- Vérifier que le couple  $(11, 12)$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$
- 0.75 2- Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E)$

**Partie II :** On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(F)$  :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

- 1- Soit  $x \in \mathbb{Z}$  une solution de l'équation  $(F)$
- 0.5 a) Montrer que  $x$  et 43 sont premiers entre eux, en déduire que :  $x^{42} \equiv 1 \pmod{43}$
- 0.5 b) Montrer que :  $4x \equiv 1 \pmod{43}$ , en déduire que :  $x \equiv 11 \pmod{43}$
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $(F)$

**Partie III :** On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système à deux équations suivant  $(S)$  :  $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

- 1- Soit  $x$  une solution du système  $(S)$
- 0.5 a) Montrer que  $x$  est solution du système  $(S') : \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$
- 0.5 b) En déduire que :  $x \equiv 527 \pmod{2021}$  (On pourra utiliser la partie I)
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S)$

FIN