المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2020
– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices** :

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique **(au choix)**..........................**3.5 points**
  ou bien
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)...3.5 points**

- **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**.....**3.5 points**

- **EXERCICE4** qui concerne l'analyse **(obligatoire)**...............................**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

<u>EXRECICE1</u> :(3.5points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE1 il ne faut pas traiter EXERCICE2

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \quad [pq]$

0.5 1-a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1 \; [p]$ et que $9^{q} \equiv 1 \; [p]$

0.5 2-a) Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

1 b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0.5 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1 \; [q]$

0.5 b) En déduire que : $q = 5$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE2 il ne faut pas traiter EXERCICE1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Première partie :

0.25 1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0.5 b) Déterminer une base de $(E,+,\cdot)$

0.25 2- a) Vérifier que :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \; ; M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$

0.5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

Deuxième partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 1- Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$

2- On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.5 b) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F - \{O\}$)

0.5 c) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(x,y,0) = O$

0.25 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

I- Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$(E): z^2+2z+1+m^2=0$ et $(F): z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)=0$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0.25 2- a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, La rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et La rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1.5 1- Montrer que : $p=-1+m$, $q=\frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r=\overline{q}$

0.25 2- a) Vérifier que : $q-r=-ip$

0.5 b) En déduire que : $OP=QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

EXERCICE4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ par $f(x)=x\ln(2-x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x\in I$; $f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$

0.5 b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I

0.75 c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in\,]0;1[$ tel que : $f'(\alpha)=0$ et que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 2-a) Etudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.

0.5 b) Montrer que la courbe (C) est concave.

0.5 c) Montrer que : $(\forall t\in I)$, $(\forall x\in I)$; $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$

0.5 d) En déduire que : $(\forall x \in I)$; $f(x) \leq x\ln 2$ et $f(x) \leq -x+1$

0.5 3- Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

0.75 4- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I=[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

0.5 1-a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

0.5 b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n) = 0$

0.75 2- a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I;\quad f_n'(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où :

$$g_n(x) = n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

0.5 b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

0.5 c) En déduire que α_n est unique.

3- On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie.

1 a) Montrer que : $\forall n \geq 2;\quad f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha_n^{\,n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

1 b) Montrer que : $\forall n \geq 2\quad g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

Troisième partie :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

0.75 1- Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

0.5 2- En utilisant une intégration par parties , montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}dx$

0.75 3- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$