المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵜⵍⵉ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ
ⴷ ⵓⵙⵉⵍⵖ ⴰⵣⵣⴰⵢⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⵏⴰⵡⴰⵢ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2020
- الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (5) pages numérotées de 1/5 à 5/5
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices** :

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique **(au choix)**..**3.5 points**
  ou bien
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)**................................**3.5 points**

- **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**.................................**3.5 points**

- **EXERCICE4** qui concerne l'analyse **(obligatoire)**...**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

EXERCICE1 :(3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE1, il ne faut pas traiter EXERCICE2)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$

1- Soit $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $x^{12} \equiv 1 \quad [13]$

1 c) Montrer que : $x^{3} \equiv 10 \quad [13]$

0.5 d) En déduire que : $x^{12} \equiv 3 \quad [13]$

1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R}^* \right\}$.

0.5 1- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E

0.5 c) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0.5 a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\varphi(x) = M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

1 b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, (E) : $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2- On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

0.25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

<u>Deuxième partie</u> :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A,

Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

0.25 1- Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de P est $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de Q est $q=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 3- Montrer que $OQ=PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

<u>EXERCICE4</u> :(13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad (\forall x\in]0;+\infty[) \quad ; \quad f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x,x+1]$, montrer que : $(P)\quad (\forall x\in]0;+\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

0.5 2-a) En utilisant la proposition (P) , montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

0.5 b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 3-a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I

(On pourra utiliser la proposition (P))

0.25 c) Dresser le tableau de variations de f

4- Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

0.5 b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha\in]1;2[$ (On prendra $\ln 2=0.7$ et $\ln\frac{3}{2}=1.5$)

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont 0 et α

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe (C).

(On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de (C))

0.25 b) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $0<u_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n<\alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $g(]0;\alpha[)=]0;1[$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0.5 3- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $(\forall x\in I)\ ;\ F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'

0.25 c) En déduire que F est strictement décroissante sur I

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x\in [1;+\infty[)\ ;\ F(x)\leq (1-x)\ln 2$

0.25 b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$$

0.5 b) Calculer $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$)

0.5 c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$

4- Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0.5 a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq v_n\leq -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarque que : $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$)

0.25 c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN