

Correction proposée :
examen national R.S.M - 2019

Ex 1. (structure algébrique)

on définit sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ par: $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy) * (a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$$

1- a) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$
 $z' = a+ib, a, b \in \mathbb{R}$

ona:

$$\begin{aligned} z * z' &= xa + i(x^2b + a^2y) \\ &= a(x+iy) + i(ya^2 + bx^2) \\ &= z' * z \end{aligned}$$

g/c: la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$

1- b) Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy$
 $z' = a+ib$
 $z'' = m+in$

tq: $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z * z'$ et $z' * z''$

on vérifie que:

$$(z * z') * z'' = z * (z' * z'')$$

g/c: la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

1- c):

comme $*$ est commutative.

il suffit de résoudre l'équation

$z * e = z$ d'inconnue $e = a+ib$
et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit: $z * \mathbb{C}^* \text{ tq: } z = x+iy$

$$z * e = z \Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x+iy$$

$$\Leftrightarrow xa = x, x^2b + a^2y = y$$

$$\Leftrightarrow a = 1, x^2b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 1$$

pour $z = 0$ ona: $0 * 1 = 0$

d'où: $*$ admet $e = 1$ comme l'élément neutre.

1- d) Soit: $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $z' = a+ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{ona: } z * z' = e = 1$$

$$\Leftrightarrow xa = 1 \text{ et } x^2b + a^2y = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{x} \text{ et } b = -\frac{y}{x^2}$$

comme $*$ est commutative

alors: la symétrisée de z est z'

$$\text{avec: } z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^2}$$

2- $E = \{x+iy / x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Soit $z, z' \in E, z = x+iy, x > 0$
 $z' = a+ib, a > 0$

ona:

$$z * z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$$

$$\text{car: } x, a > 0 \Rightarrow x.a > 0$$

g/c: E est stable par $*$

2- b)

ona: $*$ est associative

• toute élément de E est

symétrisable de sq $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^2}$

$$(\text{car: } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0)$$

• $*$ est commutative

alors: $(E, *)$ est un groupe abélien

3- $G = \{1+iy / y \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{ona: } G \subset E \quad \text{car: } 1 > 0$$

Soit: $z, z' \in G$ tq: $z = 1+iy$
 $z' = 1+ib$

$$\text{ona } z * \text{sgm}(z') = z * (1-ib)$$

$$= 1 + i(-b+y) \in G$$

d'où: G est un sous grp de $(E, *)$

24. $F = \{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x > 0, y \in \mathbb{R} \}$

ai) Soit: $M(x, y), M(a, b) \in F$ on a:

$$M(x, y) \times M(a, b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$$

car: $xa > 0$ et $xb + ya \in \mathbb{R}$

de même, $M(a, b) \times M(x, y) = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

ceci: F est stable par $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

bi) $\varphi: E \longrightarrow F$
 $x + iy \longrightarrow M(x, y)$

Soit: $z = x + iy, z' = a + ib \in E$

$$\varphi(z * z') = M((xa)^2, x^2b + a^2y)$$

et on a:

$$\begin{aligned} \varphi(z) \times \varphi(z') &= M(x^2, y) \times M(a^2, b) \in F \\ &= \begin{pmatrix} (xa)^2 & x^2b + a^2y \\ 0 & (xa)^2 \end{pmatrix} \text{ (question a)} \\ &= M((xa)^2, x^2b + a^2y) \end{aligned}$$

alors: $\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$ (i)

Soit: $M(a, b) \in F, a > 0, b \in \mathbb{R}, z \in E$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= M(a, b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a, b) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(a > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}, y = b$$

alors:

φ est bi de $E \longrightarrow F$ (ii)

(i), (ii) $\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$

□: comme.

$(E, *)$ est un grp commutatif.
 $\varphi: (E, *) \longrightarrow (F, \times)$ est un iso.

alors: $(F, \times)$ est un groupe commutatif

Fin structure.

Exercice II: les nombres complexes.

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$(E): z^2 - (1+i)(m+1)z + 2im = 0$$

$$\Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 4im$$

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 2i \\ \Delta &= (1+i)^2[(m+1)^2 - 2m] \\ &= (1+i)^2(m-1)^2 \end{aligned}$$

si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Absurde.

alors: $\Delta \neq 0, \forall m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

1-b) comme: $\Delta = (m-1)^2(1+i)^2$

$$z_1 = \frac{(m+1)(1+i) + (m-1)(1+i)}{2} = m(1+i)$$

$$z_2 = \frac{(m+1)(1+i) - (m-1)(1+i)}{2} = 1+i$$

alors: les solutions de (E) sont:

$$z_1 = (1+i) \cdot m, z_2 = 1+i$$

2

2. ~~Soit~~ $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$
 R-α: comme z_1, z_2 sont le sol.
 de (E)

d'où: (E) $\Leftrightarrow (z - z_1)/(z - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$

alors: $\begin{cases} z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) \\ z_1 z_2 = -2im \end{cases}$ (*)

or: $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}})$
 $= 2 \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$

(d'après la Formule d'Euler).

Alors:
 $z_1 + z_2 = (1 + e^{i\frac{\pi}{2}})(1 + e^{i\theta})$
 $= 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$
 $= 2\sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$

comme: $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} > 0$

d'où: $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}}$

conclusion:

$\begin{cases} |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ \arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} [2\pi] \end{cases}$

R-b:

$z_1 z_2 = -2im$. (d'après *).

si $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

d'où: $\exists x \in \mathbb{R}$ tq: $m = ix$

$m = e^{i\theta} \Rightarrow |m| = 1 = |x| \Rightarrow x = \pm 1$

or: $\theta \in]0, \pi[$ d'où: $x > 0$

conclusion: $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m = i$

d'où: $z_1 + z_2 = (1+i)^2 = 2i$

II:

or: ω est le milieu de $[CD]$

d'où: $\omega = \frac{c+d}{2}$

or: $D(d)$ est l'image de $B(b)$
 par rotation de centre $O(0)$

et d'angle $\theta = \pi/2$

d'où: $d - z_0 = e^{i\theta}(b - z_0)$

$\Rightarrow d = ib = i(1+i)m$

$\Rightarrow d = (i-1)m$

d'où: $\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i) + (i-1)m}{2}$

or: $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

R-b: $\frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i)m - (1+i) \times 2}{(1-i)(1-m)} \times 2$

$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} \times 2$ $\begin{cases} m \neq 1 \text{ car } \\ m \in i\mathbb{R} \end{cases}$

$= \frac{1+i}{i-1} \times 2$

$= \frac{(1+i)(1+i)}{(i-1)(i-1)} \times 2 = -\frac{(1+i)^2}{-2} = (1+i)^2$

$\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i$, $z_0 = 0$

R-c: $\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i \Rightarrow \begin{cases} \arg(AB) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AB = 2 \cdot OR \end{cases}$

alors: $(OR) \perp (AB)$ et $AB = 2 \cdot OR$

II-2: $(\odot \mathcal{L}) \cap (AB) = \{H(\mathcal{L})\}$.

R-9: $H \in (AB)$ d'cui:

les pts A, B, H sont des pts directs.
(Alignés). d'cui $\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \pmod{\pi}$

$\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pi \pmod{\pi}$

d'cui: $\frac{b-a}{b-a} \in \mathbb{R} \quad (e^{i\pi} = -1)$

cha: $(\odot \mathcal{H}) \perp (AB)$

d'cui: $\arg\left(\frac{z_H - z_0}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

alors: $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \quad (e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$

b: $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \frac{h-a}{b-a} = x$

$\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}: \frac{h}{b-a} = iy$

$\frac{h-a}{b-a} = x \Leftrightarrow \frac{h}{b-a} = x + \frac{a}{b-a}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} iy = x + \frac{1}{m-1} \end{cases}$

d'cui:

$iy = x + \frac{1}{m-1}$

$-iy = x + \frac{1}{\bar{m}-1}$

$\Rightarrow 2iy = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{\bar{m}-1}$

$iy = \frac{1}{2} \frac{\bar{m} - m}{(m-1)(\bar{m}-1)}$

d'cui: $h = (b-a) \cdot iy$

$h = \frac{(1+i)}{2} \cdot \frac{\bar{m} - m}{\bar{m} - 1}$

Rq: $m, \bar{m}$ sont $\neq 1$ car $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Conclusion

$h = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{\bar{m} - m}{\bar{m} - 1}$

Fin complexe.

Exercice III: Arith. $\mathbb{Z}$

On admet que: 2969 est premier

[1]: on suppose que: 2969 $\nmid n$.

comme: 2969 est premier.

$2969 \nmid n$.

alors: $2969 \nmid n = 1$

d'après: le Théorème de Bézout.

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2: 2969u + n \cdot v = 1$

$\Leftrightarrow nu \equiv 1 \pmod{2969}$

1-b: $cha: n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

d'cui: $(u \cdot m)^8 \equiv -(n \cdot u)^8 \pmod{2969}$

cha: $(n \cdot u)^8 \equiv 1 \pmod{2969}$

d'cui: $(u \cdot m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$

alors: $(u \cdot m)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371} \pmod{2969}$

q/c: $(u \cdot m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

con: $2968 = 8 \times 371$ (4)

1-c:

ona: $(u.m)^{2968} \equiv -1 [2969]$

d'ici: $\exists k \in \mathbb{Z}: (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$

$\Leftrightarrow \exists u', v' \in \mathbb{Z}: (u.m)u' + 2969.v' = 1$

$(u' = -(u.m)^{2967} \text{ et } v' = k.)$

d'après: le Théorème de Bezout

ona: $2969 \wedge u.m = 1$

d'ici: $2969 \nmid u.m.$

1-d: $2969 \wedge u.m = 1$

$\left\{ \begin{array}{l} 2969 \text{ premier} \end{array} \right.$

d'après: le Théorème de Fermat, ona

$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 [2969]$

d'ici: $(u.m)^{2968} \equiv 1 [2969]$

2-a: ona:

$(u.m)^{2968} \equiv -1 [2969] \quad (1-b)$

$(u.m)^{2968} \equiv 1 [2969] \quad (1-d)$

Absurde.

d'ici: l'hypothèse dans la question 1 est fautive.

alors: $2969 \mid n$

2-b:

$\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases}$

$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$

$\Rightarrow$ ona: $2969 \mid n$

d'ici: $n \equiv 0 [2969]$

~~d'ici: $n \equiv 0 [2969]$~~

~~$2969 \mid m$~~

Comme dans l'égalité:

$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

m, n jouent des rôles.

Symétrique

alors: si on suppose que $2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va

trouver l'Absurde, $(1 = -1)$

conclusion: $2969 \mid m$

d'ici:

$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

$\Leftrightarrow n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969]$

Proposé par: SAÏD IBRAHIM QAFD
Signature

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

2-a : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4 \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) + 4x \left(-e^{-x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 4 \left(e^{-x} - x e^{-x} + x - 1 \right)$$

$$f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})$$

2-b : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{on a: } f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1-x)$$

$$\text{Si } x < 0 : \text{on a: } e^{-x} > 1.$$

$$\text{d'où: } \forall x < 0, f'(x) > 0$$

$$\text{Si } x > 0 : \text{on a: } e^{-x} < 1.$$

$$x \rightarrow 1-x \text{ change le signe on a:}$$

$$\text{d'où: } \forall x \in [0, 1] : f'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[: f'(x) \geq 0$$

conclusion :

f str croissante sur $]-\infty, 0]$.

et $[1, +\infty[$

f str décroissante sur $[0, 1]$

et on a : le Tableau de variation

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

2-c

on a : f continue, strictement croissante sur $]3/2, 2]$

d'où : f est bijection de $]3/2, 2]$ vers.

$$f\left(]3/2, 2]\right) = \left[6x \left(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1\right), 8(e^{-2})\right]$$

$$\text{comme: } e^{3/2} \approx 4,5 > 4$$

$$\text{d'où: } 6 \left(\frac{1}{e^{3/2}} + \frac{1}{4} \right) < 0$$

$$\text{alors: } 0 \in]f(3/2), f(2)[$$

d'où : 0 admet un seul antécédent on le note $\alpha \in]3/2, 2]$

$$\text{c/c: } \exists ! \alpha \in]3/2, 2[: f(\alpha) = 0$$

$$2-d) f(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha \left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{car: } \alpha > \frac{3}{2}$$

(6)

B-a:
 on a: f' continue sur $[0,1]$, dérivable
 sur $]0,1[$. (produit de fact-)

et $f'(0) = f'(1) = 0$

alors: d'après le Théorème de ROLL

$\exists x_0 \in]0,1[: f''(x_0) = 0$

3-b: ~~Soit~~ Soit $x \neq x_0 \in [0,1]$

on a: f'' est continue, dérivable sur
 l'intervalle I d'extrémités x et x_0

d'après: T.A.F

$\exists c \in I$ tq: $f'(c) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$
 $= \frac{f''(c) - 0}{x - x_0}$

on a: $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x}$ (calcul)

d'où: $f^{(3)}(c) = (3-c)e^{-c} > 0$

car c dans l'intervalle I d'ext
 x et x_0 , $I \subset [0,1]$.

Conclusion:
 $\forall x \in [0,1], x \neq x_0, \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

B-c:

on a: $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

d'où: f'' s'annule en $x = x_0$
 avec: changement de
 signe

alors: $I(x_0, f(x_0))$ est un pt
 d'inflexion de la courbe

4-a Les branches infinies

on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1$
 $= +\infty$ car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

alors: (C_f) admet une branche
 parabolique de direction
 (oy), au voisinage de $+\infty$

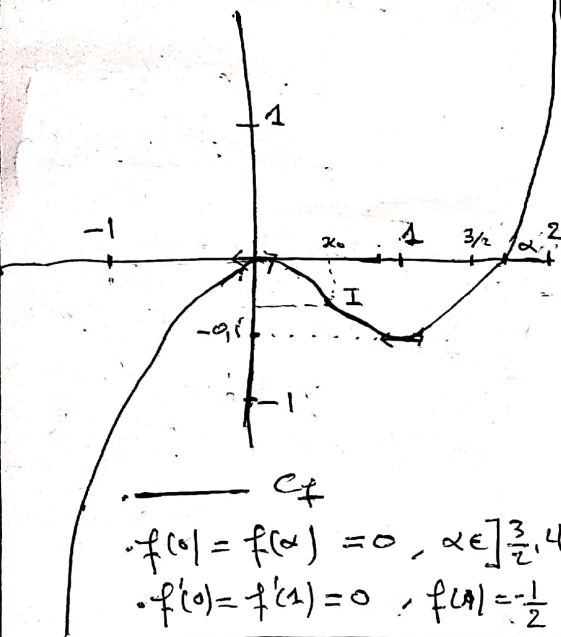
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{e^x}{e^x} \right)$
 $= +\infty$

car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

d'où:
 (C_f) admet 1 branche parabolique
 de direction (oy) au vois
 de $+\infty$

(4)

4-b: représentation graphique



$f(0) = f(2) = 0, \alpha \in]\frac{3}{2}, 4]$
 $f'(0) = f'(2) = 0, f(1) = -1$

5-a:
d'après le Tableau de variation on a
 $\forall x \in]-\infty, 0]: f(x) \leq 0$
 $\forall x \in [0, \alpha]: f(x) \leq 0$

d'où $\forall x \in [-\alpha, \alpha]: f(x) \leq 0$

5-b:

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^\alpha (4xe^{-x} + 2x^2 - 4x) dx$$

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x} dx = [4xe^{-x}]_0^\alpha + \int_0^\alpha 4e^{-x} dx$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + [4e^{-x}]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1)$$

d'où:

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1) + 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

on: $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} (2 - d)$

conclusion: (calcul)

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

d'induction:

comme: $\forall n \in [0, \alpha]: f(x) \leq 0$

$$d'où: \int_0^\alpha f(x) dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$$

ch: $\alpha > 2$

$$d'où: \alpha \in]2, \sqrt{3}]$$

5-d

$$I_{aire} = \int_0^\alpha |f(x)| dx \text{ u.a}$$

$$= - \int_0^\alpha f(x) dx \cdot \text{u.a}$$

$$I_{aire} = \frac{2}{3}\alpha(3 - \alpha^2) \cdot \text{cm}^2$$

Partie II: cm. de f(x):

$$u_{n+1} = f(u_n) + u_n, u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$$

1-a: pour $n=0$, $u_0 < \alpha$.
Supposons que $u_n < \alpha$, Montrons que $u_{n+1} < \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

cha: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$u_n < \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq 0$ (I-5-a) ^(H.R)

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \alpha$ CQFD

gc: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$

1-b:

cha: $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

or: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$.

d'après: I-5-a: $f(u_n) \leq 0$

conclu: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

gc: (u_n) est décroissante

2-a: Supposons que $0 < u_0 < \alpha$.

$g(x) = e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fct dérivables

alors: $g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 > 0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g		$g(\ln 2)$	

cha: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) \geq g(\ln 2)$

or $g(\ln 2) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} > 0$

Cm: $\ln 2 = 0,69 > 1/2$.

conclu: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 0$

2-b:

cha: $f(x) + x = 4x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1) + x$

$= x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{2})$

$= 4x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{4})$

$f(x) + x = 4x g(x)$

Rq: dans l'énoncé il y'a 1 fait

$f(x) + x = x g(x)$ doit remplacer

par: $f(x) + x = 4x g(x)$!

gc: $f(x) + x = 4x g(x)$

cha: $u_0 \geq 0$.

pour $n=0$, $u_0 \geq 0$

Supposons que $u_n \geq 0$, Montrons $u_{n+1} \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

cha: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4u_n g(u_n)$

comme: $\forall x \in \mathbb{R} g(x) > 0$

alors: (H.R) $\Rightarrow u_{n+1} = 4u_n g(u_n) > 0$

conclu: $u_{n+1} > 0$

conclu: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$

2-c:

cha: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$
 ch: (u_n) décroissante

alors: (u_n) décroissante, minorée par 0

d'ou: (u_n) est convergente

2-d

cha: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$
 $= h(u_n)$

avec: $h(x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$

et cha: $0 \leq u_n \leq u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$
 $x \rightarrow h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$.

alors: $\lim u_{n+1} = \lim h(u_n)$
 $= \lim f(u_n) + u_n$

$$\Rightarrow l = f(l) + l$$

$$\Rightarrow f(l) = 0$$

on d'après l'étude et la représentation de f

cha: $l=0$ ou $l=\alpha$

ch: $u_n \leq u_0 < \alpha$

$$\Rightarrow \lim u_n = l \leq u_0 < \alpha$$

conclusion;

$$\lim u_n = 0$$

3: on suppose que: $u_0 < 0$

3-a: cha:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n)$$

comme: (u_n) est décroissante

alors: $u_n \leq u_0 < 0$
 et f croissante sur $]-\infty, 0]$

$$\text{d'ou: } f(u_n) \leq f(u_0)$$

$$\forall n: u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

10/10

3-b

pour $n=0$: $u_0 \leq u_0$

Supp qu: $u_n \leq u_0 + n f(u_0)$

$$\text{Montrons: } u_{n+1} \leq u_0 + (n+1) f(u_0)$$

Satisfaisant

$$\text{cha: } u_{n+1} \leq u_n + f(u_0) \quad (3-a)$$

$$\stackrel{(H.R)}{\leq} u_0 + n f(u_0) + f(u_0)$$

$$\leq u_0 + (n+1) f(u_0)$$

$$\text{d'ou: } \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_0 + n f(u_0)$$

$$\text{3-c: } u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) = 0 \\ \Rightarrow f(u_0) < 0$$

$$\text{d'ou: } \lim u_0 + n f(u_0) = -\infty$$

conclusion

$$\lim u_n = -\infty$$

Fin

SAID

IBN JAA

~~xygma~~