

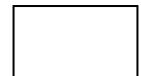
4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و "ب" (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
 - L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques(3.5 pts)
 - L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes(3.5 pts)
 - L'exercice3 se rapporte au calcul des probabilités(3 pts)
 - L'exercice4 se rapporte à l'analyse(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé



EXERCICE 1 (3.5points) :

On rappelle que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un espace

vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et on considère

l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{C}), +)$

0.5 2- a) Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$

0.25 b) Montrer que l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est de dimension 2

0.25 3-a) Montrer que E est stable pour la loi " \cdot "

0.5 b) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif .

4- On définit dans $M_2(\mathbb{C})$ la loi de composition interne T par : pour tout $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de $M_2(\mathbb{C})$,

$$M(x, y)TM(x', y') = M(x, y) \cdot M(x', y') - M(y, 0) \cdot M(y', 0)$$

Et soit j l'application de \mathbb{C}^2 vers E qui à tout nombre complexe $x + iy$

(où $(x, y) \in \mathbb{C}^2$) fait correspondre la matrice $M(x, y)$ de E

0.25 a) Montrer que E est stable pour la loi " T "

0.25 b) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^2, +)$ vers (E, T)

0.25 c) On pose : $E^* = E - \{O\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.

0.5 5- a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi « + » dans E

0.25 b) Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2 : (3.5 points)

1- Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on pose : $h(z) = \frac{az - 2i}{z - i}$

0.5 a) Vérifier que : $h(z) = z \quad \hat{U} \quad z^2 - 2iz - 2 = 0$

0.5 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2) .

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\operatorname{Re}(a) = 1$

Et pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i, a, b\}$ on note $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$ les points d'affixes respectivement $z, h(z), a$ et b

0.75 a) Montrer que : $\frac{h(z) - a}{h(z) - b} = - \frac{z - a}{z - b}$

0.75 b) En déduire que : $\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A} \parallel \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}$ [2p]

0.5 3- a) Montrer que si M, A et B sont alignés alors M, A, B et M' sont alignés.

0.5 b) Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés alors M, A, B et M' sont cocycliques.

EXERCICE 3 : (3 points)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile ».

(le nombre de fois d'apparition de la face « pile » divisé par 10)

1 1-a) Déterminer les valeurs prise par X

1 b) Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2} \right]$

1 2- Quelle est la probabilité de l'événement : X supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$?

EXERCICE 4 : (10points):

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j)

1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

(On pourra remarquer que : $f(x) = \frac{\ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$)

0.75 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat

obtenu

0.75 2- a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0.75 b) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que :

1 $(\forall x \in]0, 1]) \quad 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

0.5 d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé.(On prendra pour unité 2cm)

3- Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

0.5 a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$

1 b) Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur $[0, +\infty[$

0.75 4- a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_x^1 \sqrt{t} \ln t dt$ pour tout $x > 0$

0.75 b) Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$

1 c) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

5- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$

1 a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN