المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2016

- الموضوع -

RS 25

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte au calcul des probabilités ……(3 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques.. (3.5 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes…..(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse..……….............(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse………………..(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1 :(3pts)

On a deux boites U et V .La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.

La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U :Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V ;si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V .

Soients les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »

B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »

R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »

B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

0.5 1- Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U .

0.5 2- a)Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0.5 b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 3- Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\dfrac{13}{21}$

0.5 4- En déduire la probabilité de l'événement R_V .

EXERCICE 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(z)/z\in\mathbb{C}\}$

1- On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\forall z'\in\mathbb{C})\ :\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

1 Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

2- On considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E

1 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

0.5 b) En déduire que $(E-\{M(0)\},\times)$ est un groupe commutatif.

1 3- Montrer que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$

0.5 1-a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=\left[(\sqrt{3}-1)(1-i)\right]^2$

1 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$

0.75 a) Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z'=a\bar{z}-b$ et $z\neq b$

0.5 Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\dfrac{2}{|z-b|^2}$

0.75 c) En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

EXERCICE 4 : (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\ln(x)-\dfrac{n}{x}$

et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n).

0.75 b) Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ puis donner son tableau de variation.

0.5 c) Construire (C_2)

0.5 2- Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

0.5 b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.5 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante.

0.5 4-a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\ln(x)<x$

0.5 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}])\ :\ I_n = f_n(c_n)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \le I_n \le \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

0.5 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n,+\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t}\,dt$$

0.5 1-a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n,+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g'_n

0.25 b) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n,+\infty[$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \ge n)\ ;\ g_n(x) \ge \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité : $(\forall t \ge 0)\ ;\ \ln(1+t) \le t$)

0.25 b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0.25 3-a) Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n,+\infty[$ dans l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \ge 2)\ (\exists!\, u_n \ge n)\ :\ \displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$

4- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge2}$ définie dans la question 3-b).

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge2}$ est strictement croissante.

0.25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN