

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 25

٢٠١٤ | ٢٠١٤
٢٠١٤ | ٢٠١٤
٢٠١٤ | ٢٠١٤



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتحفيظ والامتحانات والتوجيه

| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 4 |
|------------------|--|-------------|---|
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية) | المعامل | 9 |

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
 - L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
-
- Le premier exercice se rapporte à l'arithmétique.....(3 pts)
 - Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
 - Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
 - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(8 pts)
 - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(2pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $a_n = \underbrace{333\dots\dots 31}_{n \text{ fois}}$ (n fois le chiffre 3)

0.5 1- Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0.5 2- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3 - Montrer que pour tout k de \mathbb{N} : $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$

0.75 4 - Montrer que pour tout k de \mathbb{N} : $3a_{30k+1} \not\equiv 0 \pmod{31}$, puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1}

0.5 5- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , si $n \not\equiv 1 \pmod{30}$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{Z}^2

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{C}), +, \times)$ est un anneau

unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de \mathbb{C} , on pose : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{C}), +)$

0.75 2- Calculer $J^2 = J'$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(M_2(\mathbb{C}), \times)$

3- On définit sur $M_2(\mathbb{C})$ la loi de composition interne* par :

$$A * B = A \times N \times B \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application φ de \mathbb{C}^* vers $M_2(\mathbb{C})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ (a et b étant deux nombres réels) la matrice $M(a, b)$.

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) vers $(M_2(\mathbb{C}), *)$

0.25 b) On pose : $E^* = E - \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

- 0.5 c) Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.
- 0.5 4-Montrer que : $(\forall (A, B, C) \in E^3) \quad A * (B + C) = A * B + A * C$
- 0.5 5-En déduire de ce qui précède que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overset{\text{I}}{u}, \overset{\text{I}}{v})$

Soit q un nombre réel tel que : $q = \frac{p}{2}$ où $p \in \mathbb{Z}$

1-On considère dans \mathbb{C} l'équation suivante : (E) $z^2 - \sqrt{2}e^{iq}z + e^{2iq} = 0$

0.25 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $D = (\sqrt{2}ie^{iq})^2$

0.75 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans \mathbb{C}

2- On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectives

$$1, -1, e^{iq + \frac{p}{4}}, e^{iq - \frac{p}{4}} \text{ et } \sqrt{2}e^{iq}$$

0.5 a) Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0.25 b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$. Montrer que les points O, K et A sont alignés.

0.25 c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3- Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{p}{2}$

0.25 a) Donner l'expression complexe de la rotation r

0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est : $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$

0.25 c) Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

0.25 4-Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $(- \overset{\text{I}}{v})$

0.25 5-Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 4 : (8 pts)

I - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

0.5 1-a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

0.25 b) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

| | |
|------|---|
| 0.25 | b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}, +\mathbb{Y}$ [|
| 0.5 | c) Montrer que : $(\exists \alpha \in]0,1[) \quad f'(\alpha) = 0$ |
| 0.5 | d) En déduire que : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ |
| | <i>II - On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$</i> |
| | et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. |
| 0.5 | 1-a) Vérifier que : $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ |
| 1 | b) Montrer que : $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ |
| 1 | (On remarquera que : $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$) |
| 0.5 | c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. |
| 0.5 | 2-a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ |
| 0.25 | b) Etudier les variations de F sur $[0, +\infty[$ |
| 0.5 | <i>III - 1-a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$</i> |
| 0.25 | b) En déduire que : $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$ |
| 0.25 | c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}, +\mathbb{Y}) \quad F(x) < x$ |
| | 2-On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in]0,1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = F(u_n)$ |
| 0.5 | a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]0,1[$ |
| 0.5 | b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente. |
| 0.5 | c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ |

Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ g(0) = 0 & \end{cases}$$

0.5 1- Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

- 2-Pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ on pose : $L(x) = \int_x^1 g(t)dt$
- 0.25 a) Montrer que L est continue sur $[0, +\infty[$.
- 0.25 b) Calculer $L(x)$ pour $x > 0$
- 0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$
- 3-Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$
- 0.5 Montrer que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

FIN