

**الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا**  
**الدورة الاستدراكية 2013**  
**الموضوع**  
**RS25**



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الاجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
  - L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
  - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- 
- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
  - Le deuxième exercice se rapporte au calcul des probabilités
  - Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
  - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
  - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Exercice1 : (3,5 points) les parties I et II sont indépendantes**

I- Pour tout  $x$  et  $y$  de l'intervalle  $G = ]1, 2[$  on pose :  $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

0.5 1-Montrer que  $*$  est une loi de composition interne dans  $G$

2-On rappelle que  $(\square_+, *)$  est un groupe commutatif.

On considère l'application  $f$  de  $\square_+$  vers  $G$  définie par :  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

0.75 a) Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $(\square_+, *)$  dans  $(G, *)$

0.5 b) En déduire que  $(G, *)$  est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

II-On rappelle que  $(M_3(\square), +, \times)$  est un anneau unitaire dont le zéro est  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et l'unité est  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $(M_3(\square), +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel

et on pose :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 1-a) Vérifier que :  $A^3 = O$  et en déduire que  $A$  est un diviseur de zéro dans l'anneau  $(M_3(\square), +, \times)$

0.5 b) Vérifier que :  $(A^2 - A + I)(A + I) = I$  en déduire que la matrice  $A + I$  admet un inverse dans  $(M_3(\square), +, \times)$  que l'on déterminera.

0.75 2-Pour tout  $a$  et  $b$  de  $\square$  on pose :  $M(a, b) = aI + bA$  et l'on considère l'ensemble

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$$

Montrer que  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

**Exercice2 : (3points)**

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I- On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne . et on considère la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de boules noires tirées.

1 1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$

0.5 2- Calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$

II-On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

Etape 1 : On tire une boule de l'urne ,on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

Etape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1

Etape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2

On considère les évènements suivants :

N "la boule tirée à l'étape 1 est noire"

R "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"

E "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires "

0.5 1) Montrer que :  $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0.5 2) Calculer  $p(E)$

0.5 3) Calculer la probabilité de l'événement  $R$  sachant que  $E$  est réalisé.

**Exercice 3 : (3.5points)**

I- Soit  $a$  un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0.5 1) Montrer que :  $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$  et  $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$  sont les deux solutions de l'équation  $(E)$

2) On prend  $a = e^{i\theta}$  avec  $0 < \theta < \pi$

0.5 a- Montrer que :  $a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 b- En déduire la forme trigonométrique de  $z_1$  et  $z_2$

II- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On admet que  $\text{Re}(a) < 0$  et on considère les points  $A(a)$ ,  $B(-i)$ ,  $C(i)$  et  $B'(1)$

0.5 1) Déterminer en fonction de  $a$ , les affixes des points  $J$  et  $K$  milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[AB]$

2) Soit  $r_1$  la rotation de centre  $J$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_2$  la rotation de centre  $K$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

On pose  $C' = r_1(C)$  et  $A' = r_2(A)$  et soient  $c'$  l'affixe de  $C'$  et  $a'$  l'affixe de  $A'$

0.5 Montrer que :  $a' = z_1$  et  $c' = z_2$

0.5 3) Calculer  $\frac{a' - c'}{a - 1}$  et en déduire que la droite  $(AB')$  est une hauteur du triangle  $A'B'C'$

**Exercice 4 : (8.25 points)**

1- Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0.5 a) Montrer que  $f$  est continue à droite au point 0, puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite au point 0 (On pourra utiliser le résultat  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$ )

0.5 c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

0.5 d) Donner le tableau de variation de la fonction  $f$

2- Soit  $F$  la fonction numérique définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$   
et soit  $(C_F)$  la courbe représentative de  $F$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.25 a) Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  sur l'intervalle  $[e, +\infty[$

0.5 b) Montrer que :  $(\forall t \geq e) ; t \ln t \leq \sqrt{1+t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$

0.75 c) Montrer que :  $(\forall x \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$

0.5 d) En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

0.5 e) Montrer que  $(C_F)$  admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 f) Construire  $(C_F)$  (on prend  $F(1) \approx 0,5$  et  $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$ )

3- Pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  on pose :  $\varphi(x) = x - F(x)$

0.75 a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$  et étudier les variations de  $\varphi$

0.5 b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $\varphi(x) = n$  admet une seule solution  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $[0, +\infty[$

0.5 c) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$  puis calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0.5 4-a), Montrer que :  $(\forall n \geq 1) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$  (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.5 b) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

### Exercice 5 : (1.75 points)

Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose :  $u_n = \left( \frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$  et  $v_n = \ln(u_n)$

0.25 1- Vérifier que :  $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$

2- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

0.5  $(\forall n \geq 1) (\exists c \in ]n, n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0.5 3- Montrer que :  $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$

0.5 4- Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN