المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
## الدورة الاستدراكية 2012
## الموضوع



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | المعامل | RS25 | الرياضيات | المادة |
| 4 | مدة الإنجاز | | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية) | الشعب(ة) أو المسلك |

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Premier exercice : (3.5 points) Les deux parties I et II sont indépendantes**

**I-**Pour tout a et b de l'intervalle $I=[1,+\infty[$ on pose: $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

0.5 1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $I$

0.5 2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0.25 3) Montrer que $(I,\perp)$ admet un élément neutre.

**II-**On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 1) Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2) On considère l'application $\varphi:\ \mathbb{R}^*\to E$, $x\mapsto M(x)$

0.5 a – Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

0.5 b – En déduire la structure de $(E,\times)$ .

0.75 c- Montrer que l'ensemble $H=\left\{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix} / n\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(E,\times)$

**Deuxième exercice :( 3.5points) les parties I et II sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

**I-** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\quad z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

0.5 1) a-Vérifier que $z_1=1+\frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation $(E)$

0.25 b- Montrer que la deuxième solution de l'équation $(E)$ est $z_2=3z_1$

2) Soit $\theta$ un argument du nombre complexe $z_1$

0.5 Ecrire en fonction de $\theta$ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3}+4i$

**II-** On considère trois points distincts deux à deux A , B et $\Omega$ , d'affixes respectifs les nombres complexes a , b et $\omega$

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ . On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$

et soient $p$ et $q$ les affixes respectifs des points $P$ et $Q$

0.5 1) a- Montrer que : $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-\omega)$

0.25 b-Montrer que : $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

0.5 c- Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b} = \dfrac{\omega-a}{\omega-b}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2) On suppose que $\dfrac{\omega-a}{\omega-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

0.25 a-Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0.75 b- Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ , en déduire que $APQB$ est un rectangle.

## <u>Troisième exercice</u> : (3 points)

0.25 1) a-Vérifier que le nombre 503 est premier.

0.75 b-Montrer que $7^{502} \equiv 1\ [503]$ ; en déduire que $7^{2008} \equiv 1\ [503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\ : 49x - 6y = 1$

0.5 Sachant que $(1,8)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$ ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ en précisant les étapes de la résolution.

3) On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + ........ + 7^{2007}$

0.25 a-Montrer que le couple $\left(7^{2006}, N\right)$ est solution de l'équation $(E)$

1 b- Montrer que $N \equiv 0\ [4]$ et $N \equiv 0 [503]$

0.25 c- En déduire que le nombre $N$ est divisible par 2012

## <u>Quatrième exercice :</u>(7.5points)

**I -** Soit $g$ la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

0.5 1) Etudier les variations de $g$ sur $[0, +\infty[$

0.5 2) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$

**II -** Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$

1 1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

0.5 2) Montrer que pour tout réel $x$ on a : $f'(x)=e^{x}g(e^{-x})$

0.5 3) Dresser le tableau de variations de $f$

1 4) Construire la courbe $(C)$ représentative de la fonction $f$ et la courbe $(C')$ représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. ( on admet que $-0,7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(C)$ )

0.75 5) Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[-1,0]$ on a : $0<f'(x)\le g(e)$

0.75 6) Montrer que l'équation $f(x)+x=0$ admet un solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et que $-1<\alpha<0$

7) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=-f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 a-Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $-1\le u_n\le 0$

0.75 b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $|u_{n+1}-\alpha|\le g(e)|u_n-\alpha|$

0.5 c-En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $|u_n-\alpha|\le (g(e))^{n}$

0.25 d- Sachant que $g(e)<0,6$ ; calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## <u>Cinquième exercice</u> :( 2.5 points)

On considère la fonction $F$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\ln t}{1+t^{2}}dt$

0.25 1) Calculer $F(1)$

0.75 2)a-Montrer que $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$

0.5 b- En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $]0,+\infty[$ on a : $F(x)=0$

0.5 3) En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x>0)\ ;\ F(x)=\left(Arc\tan x+Arc\tan\frac{1}{x}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arc\tan t}{t}dt$$

0.25 4) Montrer que : $(\forall x>0)$ ; $Arc\tan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-Arc\tan x$

0.25 5) Déduire que : $(\forall x>0)$ ; $\ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arc\tan t}{t}dt$