



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2012  
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	NS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**EXERCICE 1 : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes**

I- Dans l'anneau unitaire  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ , on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.75 1) Calculer  $I - A$  et  $A^2$

0.5 2) En déduire que  $A$  admet une matrice inverse que l'on déterminera .

II- Pour tout  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$ , on pose:  $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

0.25 1) Vérifier que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ;  $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$

0.5 2) Montrer que  $*$  est une loi de composition interne dans  $I$

3) On rappelle que  $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$  est un groupe commutatif.

On considère l'application  $\varphi: \mathbb{R}^{*+} \rightarrow I$   
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

0,5 a - Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$  vers  $(I, *)$

0.25 b - En déduire la structure de  $(I, *)$

0.75 c - Montrer que l'ensemble  $\Gamma = \{ \sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{N} \}$  est un sous groupe de  $(I, *)$

**EXERCICE 2 : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$  où  $a$  est un nombre complexe non nul.

0.75 1) Déterminer  $z_1$  et  $z_2$ , les deux racines de l'équation  $(E)$

0.25 2) a- Vérifier que :  $z_1 z_2 = a^2(i-1)$  .

0.5 b- Montrer que :  $z_1 z_2$  est un nombre réel  $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$

II- Soient  $c$  un nombre réel non nul et  $z$  un nombre complexe non nul.

On considère les points  $A, B, C, D$  et  $M$  d'affixes respectifs  $1, 1+i, c, ic$  et  $z$

1)a- Montrer que :  $A, D$  et  $M$  sont alignés  $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$  ( remarquer que  $c = \bar{c}$  )

b - Montrer que :  $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

2) Soit  $h$  l'affixe du point  $H$ , la projection orthogonale du point  $O$  sur  $(AD)$

a - Montrer que :  $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$ .

b - En déduire que  $(CH) \perp (BH)$

### EXERCICE 3 : (3 points)

1) On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation  $(E) : 143x - 195y = 52$

a - Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation  $(E)$  admet des solutions dans  $\mathbb{R}^2$

b - Sachant que  $(-1, -1)$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$ , résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation  $(E)$  en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul premier avec 5

Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$

3) Soient  $x$  et  $y$  deux entiers naturels non nuls tel que  $x \equiv y \pmod{4}$

a- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $n^x \equiv n^y \pmod{5}$

b- En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $n^x \equiv n^y \pmod{10}$

4) Soient  $x$  et  $y$  deux entiers naturels tel que  $(x, y)$  est solution de l'équation  $(E)$

Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les deux nombres  $n^x$  et  $n^y$  ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

### EXERCICE 4 : (5.5 points)

$n$  est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

2) a - Etudier la branche infinie de  $(C_n)$  au voisinage de  $-\infty$ .

b - Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_n)$  au voisinage de  $+\infty$ , puis déterminer la position relative de  $(C_n)$  et  $(D)$

3) Etudier les variations de  $f_n$  et dresser son tableau de variations.

4) Construire la courbe  $(C_3)$ . ( On prend  $f_3(-0,6) \approx 0$  et  $f_3(-1,5) \approx 0$  et  $\ln 3 \approx 1,1$  )

- 0.25 5) a- Montrer que pour  $n \geq 3$  on a :  $\frac{e}{n} < \ln n$
- 1 b- Montrer que pour  $n \geq 3$  l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $x_n$  et  $y_n$  telles que :  $x_n \leq -\ln n$  et  $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
- 0.5 c- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- 6) On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$
- 0.25 a- Montrer que la fonction  $g$  est continue à droite au point 0
- 0.25 b- Vérifier que pour  $n \geq 3$  on a :  $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$
- 0.25 c- En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$
- EXERCICE 5 : (4.5points)**
- On considère la fonction numérique  $F$  définie sur  $[0,1]$  par :
- $$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si } x > 0$$
- 0.25 1) Soit  $x$  un élément de  $[0,1]$  ; Montrer que pour tout  $t$  de  $[0,x]$  on a :  $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$
- 2) Soit  $x$  un élément de  $]0,1]$
- 0.5 a- Montrer que  $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$
- 0.75 b -Montrer que :  $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$  En déduire que la fonction  $F$  est continue à droite au point 0
- 0.75 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $x$  de  $[0,1]$  on a :
- $$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left( \frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$
- 4) Soit  $x$  un élément de  $]0,1]$
- 0.5 a- Montrer que  $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left( \frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$
- 0.75 b-Montrer que :  $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$  ( on pourra utiliser le résultat de la question 1) )
- 0.75 c- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $F$  sur  $[0,x]$  montrer que  $\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$
- 0.25 d- Déduire que la fonction  $F$  est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0 .

FIN DE L'EPREUVE