



الصفحة
1 4



**امتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع**

المادة	العنوان	النوع	الघریب	الघریب
الرياضيات	RS25	الى	الى	الى
الشعب(ة) او المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الى	الى	الى

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices tous indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
 - Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
 - Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.
 - Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
 - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
 - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices non programmables sont autorisées

Premier exercice : (3.5 points)

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0, 1[$ on pose : $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

- 0.5 1-a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I
 0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
 0.5 c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
- 0.5 2-Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
- 3-On considère les deux ensembles $H = \left\{ 2^n / n \in \mathbb{Z} \right\}$ et $K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
- 0.5 a) Montrer que H est un sous-groupe de (\mathbb{Q}_+, \times)
 0.5 b) On considère l'application : $\varphi : H \rightarrow I$
- $$x \rightarrow \frac{1}{1+x}$$
- montrer que φ est un homomorphisme de (H, \times) vers $(I, *)$
- 0.5 c) En déduire que K est un sous-groupe de $(I, *)$

Deuxième exercice : (2.5 points)

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

- 0.25 1- a) vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$
 0.5 b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$
- 2- Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$
- 0.75 a) Montrer que : $10^d \equiv 1 \pmod{19}$
 0.5 b) Montrer que : $d = 18$
 0.5 c) En déduire que : $x \equiv 17 \pmod{18}$

Troisième exercice : (4 points)

Première partie : On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation :

$$(E) \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

- 0.5 1-Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E)
 0.5 2-Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :
 $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- 0.5 3-a) Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$
 0.5 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

Deuxième partie : Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A et B et C d'affixes respectifs $a = -1 + 3i$ et $b = -2i$ et $c = 2 + i$

- 0.5 1-Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C

2-On considère la rotation R_1 de centre B et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre A et dont une mesure de l'angle est $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation R_1 et M_2 son image par la rotation R_2 .

- 0.5 a)Vérifier que l'expression complexe de la rotation R_1 est : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$
- 0.5 b) Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z
- 0.5 c) En déduire que I , le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Quatrième exercice :(6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

- 1 1- calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 0.25 2-a) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 0.75 b) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera puis dresser le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}
- 0.75 3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère ($O; \vec{i}, \vec{j}$)
- 0.5 4- a) Calculer l'intégrale $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ (on posera : $t = f^{-1}(x)$)
- 0.5 b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C') et les droites d'équations : $x = 1$; $x = e + 1$ et $y = x$
- 0.25 5- Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'équation : (E_n) $x + \ln x = n$
- 0.5 a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n .
- 0.5 b) Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$
- 0.5 6-a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f(x_n) \leq f(n)$ en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) x_n \leq n$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n - \ln(n) \leq x_n$
- 0.5 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$

Cinquième exercice :(4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

0.5 1-Montrer que pour $n \geq 2$ il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

0.75 2-Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente.

(On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$)

0.5 3-a)Vérifier que pour $t \neq 1$ on a : $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

0.5 b) En déduire que : $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

0.5 4-a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad 1 + \ln(1-\alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0.75 c) En déduire que : $\ell = 1 - e^{-1}$

FIN