

Exercice 1 :

On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ M \in \mathbb{P} \longmapsto M'(\mathbb{P}) / Z' = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right)Z + \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$$

1 - Montrer que $A(\mathbb{P})$ est le seul point invariant par φ .

2 - Montrer que $AM' = \frac{\sqrt{3}}{2} AM$ et : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3 - Montrer que le triangle (AM, M') est rectangle en M' .

4 - Expliquer comment situer M' si on connaît le lieu de M dans $(0, \vec{x}, \vec{y})$.

5 - Déterminer la nature de φ .

6 - Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}(0, 1)$ par φ .

7 - On considère la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M_n = \varphi_n(0)$ et Z_n l'abscisse de M_n .

- Déterminer Z_1 et vérifier que $M_{n+1} = \varphi(M_n)$.
- En déduire que $Z_n = -2 \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right)^n + 2$.
- Déterminer les valeurs de n pour que $M_n \in \mathcal{D}(\vec{x})$.

Exercice 2 :

1 - Recherche dans $\mathbb{Z}^2$: $11x - 7y = 1$

2 - En déduire les solutions de $\begin{cases} x \equiv 1 [11] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases} \pmod{E}$

3 - Soient p et q deux nombres premiers pairs.

et $a \in \mathbb{N}^* / pa = 1$ et $qa = 1$

et on considère l'équation : $ax \equiv 1 [pq] \pmod{E'}$

a - $Mq \pmod{E'} \equiv 1 [p]$ et $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$

b - En déduire $x_0 = a^{(p-1)(q-1)-1}$ est une solution de E' .

c - $Mq \pmod{E'} \Rightarrow ax \equiv a x_0 [pq]$

d - En déduire les solutions de E' .

e - Recherche dans $\mathbb{Z}$; $10x \equiv 1 [33]$