

Exercice 1 (13,5 points)

I) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2-x)e^x + 30$

0,75 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (justifier votre réponse)

0,75 b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g .

0,5 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]3; 4[$.

0,5 b) Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{e^x + 15}$ et soit

(C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5 b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C).

1 2) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{x g(x)}{(e^x + 15)^2}$

0,5 b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-2)}{15}$

1 c) Dresser le tableau de variations de f .

1 d) Construire la courbe (C) (on prend $\alpha \approx 3,2$ et $f(\alpha) \approx 0,25$).

III) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{e^{14t} + 15} dt$

0,75 1) a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $F(x)$.

0,75 b) Étudier la parité de la fonction F

1 2) a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad \frac{7x^3}{3(e^{2x} + 15)} \leq F(x) \leq \frac{7x^3}{3(e^x + 15)}$

0,25 b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

1 3) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$F'(x) = \frac{-x^2(e^x + 4)(e^x - 15)}{(e^{2x} + 15)(e^x + 15)}$$

0,5 b) Dresser le tableau de variations de F sur $[0; +\infty[$.

IV) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{e^t + 15} dt$.

1 1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis déduire qu'elle est convergente

1 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{15(n+1)}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 2 (6,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 1 - 2i$.

On pose pour tout z de $\mathbb{C} - \{1\}$: $Z = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1}$

- 0,5 1) a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$
- 1 b) Montrer que : $(Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 1)$
- 0,5 c) Déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points A, B et M sont alignés
- 1 2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z = z$.
- 0,5 b) Soit le point C d'affixe $z_C = -i$, déterminer l'affixe du point D image de A par l'homothétie h de centre C et de rapport 2
- 1 c) Calculer $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$ puis déduire la nature du triangle BCD.
- 1 d) Soit le point E d'affixe $3 - i$. Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques.
- 1 3) On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $Z - 1$.