Partie (1) soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=-x\ln x \quad ; \quad x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=0$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

1) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation

2) a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ) $y=x$

b) tracer la courbe (C_f)

3) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=e^{-2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $0<U_n<e^{-1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est croissante ; déduire qu'elle est convergente

c) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Partie (2) soit n un entier naturel tel que $n\geq 3$

1) montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet deux solutions a_n et b_n ($a_n<b_n$)

2) a) montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

b) montrer que $(\forall n>2)$ $a_n<\dfrac{1}{n}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

3) a) montrer que $(\forall x>2)$ $2\ln x<x$ puis déduire $(\forall n\geq 3)$ $\dfrac{1}{n^2}<a_n$

b) montrer que $(\forall n\geq 3)$ $\dfrac{\ln a_n}{\ln n}\geq -1-\dfrac{\ln 2}{\ln n}-\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}$

et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln a_n}{\ln n}=-1$

4) a) montrer que $(b_n)_n$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$

b) montrer que $(\forall n>2)$ $(\exists c\in[b_n,1])$ $\dfrac{b_n-1}{\ln b_n}=c$

c) déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(b_n-1)=-1$

Partie (3) soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$

Par : $\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1} & : \ x\in]0,1[\\ f(0)=0 \quad ; & f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) montrer que f_n est continue sur $[0,1]$

2) g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g_n(x)=x^{2n+1}\ln x \quad ; \quad x\neq 0$ et $g_n(0)=0$

Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$

3) on pose $U_n(x)=\displaystyle\int_x^1 g_n(t)\,dt$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n(0)=\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,dt=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} U_n(x)$

a) calculer $U_n(x)$ pour x de $]0,1[$ et déduire $U_n(0)=-\dfrac{1}{4(n+1)^2}$

b) calculer en cm^2 l'aire du domaine limite par (C_f) ; les axes du repère et $x=1$

4) on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_{n+1}-I_n=U_n(0)$

b) étudier le sens de variation de la fonction $\varphi(x)=-x+\dfrac{1}{x}+2\ln x$

c) déduire que $(\forall x\in]0,1[)$ $0<\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2}$

5) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$

a) montrer que $(\forall n\geq 2)$ $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{2n}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_0=I_n+\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$