

Exercice 1 (5,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$$

- 1 1) a) Dresser le tableau de variations de f_n
- 15 b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n sur $\mathbb{R}_+$ puis vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < \alpha_n < \ln 2$
- 1 2) a) Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^n (\alpha_n - 1)$
- 1 b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ puis déduire qu'elle est convergente
- 1 c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^n = 0$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Exercice 2 (14,5 points)

I) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par: $g(x) = \ln x + (x-1)e^x + 1$

- 0,5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 1,5 b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C_g)
- 1 2) a) Montrer que g est dérivable sur I puis calculer $g'(x)$ pour $x \in I$
- 0,5 b) Dresser le tableau de variations de g
- 1 3) a) Démontrer que: $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq x$ et que $(\forall x \in]1, +\infty[) \quad g(x) > x$.
- 1 b) Représente la courbe (C_g) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,5 II) 1) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
- 1 b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $(g^{-1})'(1)$.
- 2) Soit la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g^{-1}(u_n) \quad (n \geq 0)$
- 0,5 a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} > 1$
- 1 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente puis calculer sa limite
- 1 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} \right)$

III) Soit la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x + (x-2)e^x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$
- b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 0,5) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,5) b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
- 1) c) Dresser le tableau de variations de f .
- d) Donner en justifiant votre réponse, le nombre de solutions de l'équation dans $]0; +\infty[: 1 + x \ln x = (x-2)(1-e^x)$.