

1^{ère} partie 4

1) a) Montrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad x > 2 \ln x$

b) Dédurre que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad x - \ln x > 0$

2) On pose pour tout x de $]0; +\infty[$: $g(x) = x - \ln^2 x$

a) Montrer que la fonction g est strictement croissante et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

b) Dédurre que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution

α dans $]0; +\infty[$ puis vérifier que $\alpha < 1$.

c) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x de $]0; +\infty[$.

2^{ème} partie 3

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{x \ln x}{x - \ln x} \text{ si } x > 0.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que dire de la courbe (C) ?

b) Montrer que $(\exists \beta \in]0; 1[) \mid f'(\beta) = 0$

c) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad f'(x) = \frac{x - \ln^2 x}{(x - \ln x)^2}$; déduire que $\beta = \alpha$.

3) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha}{1 + \sqrt{\alpha}}$

c) Prouver que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad f(x) < x$.

d) Construire la courbe (C) (on prend: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$; $\alpha = 0,5$ et $f(\alpha) \approx -0,3$)

3^{ème} partie 4

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

1) a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(h^{-1})'(\frac{e}{e-1})$

c) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! a_n \in]1, +\infty[) \mid h(a_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln a_n$.

3) On pose : $\varphi(x) = \sqrt[3]{f(x)}$

a) Déterminer D_φ (Ensemble de définition de la fonction φ)

b) Étudier la dérivabilité de φ à droite en 1.

c) Déterminer le sens de variations de φ sur D_φ