

### Exercice (1)

Soit  $n$  un entier supérieur à 2 .

on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $I = \left] -\infty, \frac{\pi}{2} \right[$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \arctan\left(\sqrt[n]{\tan x}\right) & ; \quad x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \\ f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt[n]{1-x}} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

- 1) a) étudier la continuité de  $f_n$  sur  $I$   
 b) étudier la dérivabilité de  $f_n$  à droite et à gauche de 0  
 c) étudier la dérivabilité de  $f_n$  à gauche de  $\frac{\pi}{2}$   
 d) soit  $x$  de  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  calculer  $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f_n(x)$   
 interpréter le résultat géométriquement
- 2) étudier la branche infinie de la courbe  $\left(C_{f_n}\right)$  en  $-\infty$
- 3) a) calculer la dérivée de  $f_n$  sur chacun des intervalle  $\left] -\infty, 0 \right[$  et  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$   
 b) montrer que  $f_n$  réalise une bijection de  $I$  vers  $I$   
 c) déterminer  $f_2^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $I$
- 4) a) résoudre dans  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  l'inéquation  $f_n(x) < x$   
 b) tracer dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes de  $f_2$  et  $f_2^{-1}$

5) soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $U_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $U_{n+1} = f_2(U_n)$

- a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$
- b) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$
- c) déduire que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est convergente et calculer sa limite
- 6) a) montrer que  $(\exists! a_n \in I) \quad f_n(a_n) = 1$   
 b) montrer que  $(\forall n \geq 2) \quad a_n > \frac{\pi}{4}$  en déduire que  $(\forall n \geq 2) \quad a_n > 1$   
 c) montrer que  $(\forall x > 1) \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$   
 puis comparer  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  sur l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$   
 d) étudier le sens de variation de la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  et déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite

### Exercice (2)

on considère la suite  $(V_n)_{n \geq 2}$  définie par :  $V_n = \sqrt[n]{n}$

- 1) a) montrer par récurrence que :  $(\forall n \geq 3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$   
 b) en déduire que  $(V_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante et convergente
- 2) a) montrer que  $(\forall a > 0) (\forall n \geq 2) \quad (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$   
 b) en déduire que  $(\forall n \geq 2) \quad \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

### Bonus

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^2 = 0$