

Exercice (1)

Soit n un entier supérieur à 2.

on considère la fonction f_n définie sur $I = \left[-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \operatorname{arcatn} \left(\sqrt[n]{\tan x} \right) & ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\\ f_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \\ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt[n]{1-x}} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

- 1) a) étudier la continuité de f_n sur I
 b) étudier la dérивabilité de f_n à droite et à gauche de 0
 c) étudier la dérивabilité de f_n à gauche de $\frac{\pi}{2}$
 d) soit x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ calculer $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f_n(x)$
 interpréter le résultat géométriquement

2) étudier la branche infinie de la courbe $\left(C_{f_n}\right)$ en $-\infty$

3) a) calculer la dérivée de f_n sur chacun des intervalle $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$
 b) montrer que f_n réalise une bijection de I vers I
 c) déterminer $f_2^{-1}(x)$ pour tout x de I

4) a) résoudre dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $f_n(x) < x$
 b) tracer dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes de f_2 et

5) soit $\left(U_n\right)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{\pi}{3}$ et $U_{n+1} = f_2(U_n)$

- a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite

6) a) montrer que $(\exists! a_n \in I) \quad f_n(a_n) = 1$

b) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad a_n > \frac{\pi}{4}$ en déduire que $(\forall n \geq 2) \quad a_n > 1$

c) montrer que $(\forall x > 1) \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$

puis comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$

d) étudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ et déduire qu'elle est

Exercice (2)

on considère la suite $(V_n)_{n \geq 2}$ définie par : $V_n = \sqrt[n]{n}$

- 1) a) montrer par récurrence que : $\left(\forall n \geq 3\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$

b) en déduire que $\left(V_n\right)_{n>2}$ est strictement décroissante et convergente

2) a) montrer que $\left(\forall a > 0\right) \left(\forall n \geq 2\right) \left(1 + a\right)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$

b) en déduire que $\left(\forall n \geq 2\right) \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n$

Bonus

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^2 = 0$