

**Contrôle : n°2**  
**matière : maths**

durée : 2h

**exercice1 :**

On considère la suite suivante :  $u_0 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{-u_n^2 + 2}; n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que  $0 \leq u_n \leq 1; \forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que  $(u_n)$  est convergente
3. Calculer la limite de  $u_n$

**Exercice2 :**

on considère les suites suivantes :

$$u_0 = \frac{1}{4}; u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}; v_n = u_{2n}; w_n = u_{2n+1}$$

1. Montrer que  $\frac{2}{3} \leq u_n \leq \frac{32}{17}; \forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que  $(v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  sont monotones ; en déduire quelles sont convergentes
3. Montrer que  $|u_{n+1} - u_n| \leq K |u_n - u_{n-1}|; \forall n \in \mathbb{N}^*$  avec  $K \in ]0; 1[$  1pts HB
4. Montrer que les suites  $(w_n); (v_n)$  sont adjacentes
5. Calculer la limite de  $v_n$  et  $w_n$

**exercice 3**

soit  $f_n(x) = x^n - (1-x); x \in [0; 1]; n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$  admet une seule solution  $\alpha_n \in ]0; 1[$
2. Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est convergente
3. Montrer que  $\lim \alpha_n^n = 0$
4. Calculer la limite de  $\alpha_n$

**Exercice4 :**

1.  $f(x) = \sqrt[3]{x - \arctan(x)}; x \in [0; +\infty[$  ; dresser le tableau de variation de f
2. On considère  $u_0 = 1; u_{n+1} = f(u_n)$ 
  - (a) Montrer que  $0 \leq u_n \leq 1; \forall n \in \mathbb{N}$
  - (b) Etudier la monotonie de  $(u_n)$  et en déduire quelle est convergente
  - (c) Montrer que  $|u_{n+1} - u_n| \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}} u_n; \forall n \in \mathbb{N}$  ; En déduire  $\lim u_n$