

Devoir 1

2016-2015

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+2} - \sqrt[3]{x+1}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left( E\left(\frac{2}{x}\right) - E\left(\frac{-1}{x}\right) \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\arctan 2x - \arctan x)$$

Exercice 2

- 1) montrer que  $\left( \forall (a, b) \in ]0, 1[ \right)^2 \arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$
- 2) déduire que  $3 \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{13}{9}$

Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - \sin x$

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier le sens de variation de  $f$  et déduire que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$
- 3) a) soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . montrer que  $(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}) \sin \alpha_n = \alpha_n - \frac{1}{n}$   
b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n$

Exercice 4

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ .

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\sin^{2n} x}{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \times \dots \times (1 - \cos^n x)}$

- 1) a) montrer que  $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^p x} = \frac{2}{p}$   
b) déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^n}{n!}$
- 2) a) montrer que si  $p$  est impair alors  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^p x} = 0$   
b) montrer que si  $p$  est un nombre pair alors  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^p x} = \frac{2}{p}$
- 3) déduire que  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$