

CONTRÔLE N°1 DU 1^{er} SEMESTRE

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{x}) \sqrt{x^2 - 2x + 2}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} \cdot \text{Arctan } x + \text{Arctan } \sqrt{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

- 1 - Etudier la continuité de f en 1
- 2 - Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats obtenus.
- 3 - On pose $U(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 6$
 - a - Etudier les variations de U sur $\mathbb{R}$
 - b - Montrer que $U(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$
 - c - En déduire que $\alpha \in]-\sqrt{3}, -\frac{5}{3}[$ et le signe de $U(x)$ sur $\mathbb{R}$
- 4 - Mg $f'(x) = \frac{U(x)}{3x^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2}}, \forall x < 1$
- 5 - Déterminer $f'(x), \forall x > 1$ et dresser le T.V de f sur $\mathbb{R}$
- 6 - a - Etudier les branches infinies de G_f au voisinage de $-\infty$
b - Mg $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$ est une asymptote de G_f " " $+\infty$
- 7 - Mg $f(x) \leq x - 1, \forall x \in [0, 1]$.
- 8 - Tracer G_f (on prend $f(1) = 1, 8$)
- 9 - Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$
 - a - Mg g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer
 - b - Tracer $G_{g^{-1}}$
 - c - Mg g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(0)$

Exercice 2

$$1 - \text{Mg } \forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) + \text{Arctan } x^2 = \frac{\pi}{4}$$

2 - En utilisant T.A.F :

$$a - \text{calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x^2 + x - 1) + \frac{\pi}{4}}{x^2 + 3x}$$

$$b - \text{Mg } \frac{1}{(n+1)^{1-p}} \left((n+1)^p - n^p \right) < \frac{1}{n^{1-p}}, \quad n \in \mathbb{N}^+, p \in]0, 1[$$