

المظاهر الطاقية

1 - شغل قوة

1 - شغل قوة ثابتة (تذكير)

نعتبر عن شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها من A إلى نقطة A بالعلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

بحيث أن α الزاوية بين $\vec{F}$ و $\vec{AB}$

AB المسافة الفاصلة بين النقطة A و النقطة B تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)

F شدة القوة ب (N)

$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ شغل القوة $\vec{F}$ ونعبر عنه بالجول (J)

* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير بل يتعلق بموضعها البدئي والنهائي .

2 - الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة $\vec{F}$ غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من A إلى B .

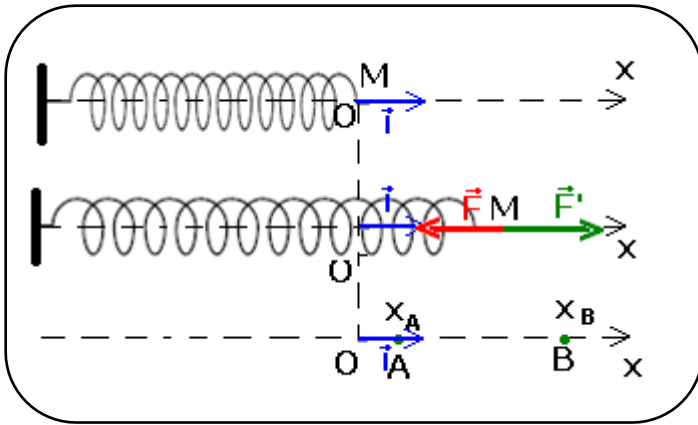
لحساب شغل غير ثابتة نجزي المسار إلى مسارات جزئية $\delta \vec{\ell}$ متناهية في الصغر تسمح باعتبار $\vec{F}$ ثابتة في كل منها .

تعبير الشغل الجزئي للقوة $\vec{F}$ خلال الانتقال الجزئي $\delta \vec{\ell}$ هو : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \sum_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_A^B \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$$

3 - شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض



نعتبر نابضا $\mathcal{R}$ ذا لفات غير متصلة صلابته k وكتلته

مهمله ، في وضع أفقي على مستوى أفقي . ثبت

أحد طرفيه بحامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر M قوة $\vec{F}'$ ، فيطال

النابض بحيث تنتقل النقطة M بالمقدار $\vec{OM} = x \vec{i}$.

تمثل النقطة O موضع M في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات المتبادلة ،

فإن النابض يطبق قوة $\vec{F}$ على المجرب وهي قوة ارتداد

$\vec{F} = -\vec{F}'$ بحيث أن $\vec{F} = -kx \vec{i}$ أي أن $\vec{F}' = kx \vec{i}$ أي أن $\vec{F}'$

تتعلق بالأفصول x إذن فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة $\vec{F}'$ عندما ينتقل طرف النابض من A إلى B

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \sum_A^B \delta W(\vec{F}') = \sum_A^B \vec{F}' \cdot \delta \vec{\ell} = \sum_A^B kx \vec{i} \cdot \delta x \vec{i}$$

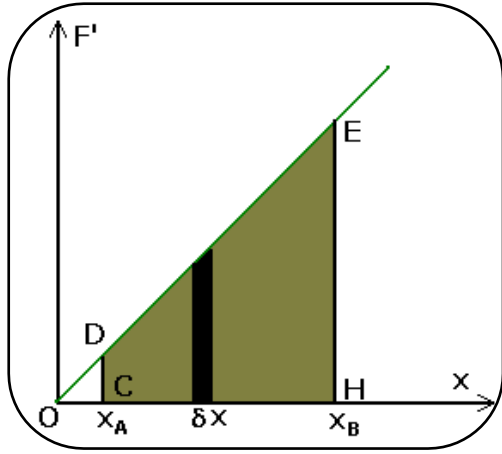
يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

أ - الطريقة المباشرة :

في نظمة محوريين نمثل تغيرات F بدلالة الأفصول x وهي إطالة النابض . $F = kx$ أي أنها دالة خطية تمر من أصل

النظمة . يوافق الشغل الجزئي $\delta W(\vec{F}') = k \cdot x \cdot \delta x$ مساحة المستطيل

الجزئي بالأسود المبين في الشكل أسفله .



عند انتقال النقطة M من A أفصولها x_A إلى B أفصولها x_B ،
فإن الشغل الكلي للقوة $\vec{F}'$ يوافق مجموع مساحات
المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف CDEF

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = a_{CDEF} = a_{OE H} - a_{OCD}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

ب - الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$ ولانتقال الجزئي $\delta \ell$ ب المقدار التفاضلي dx فنحصل على العلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \int_{x_A}^{x_B} kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر ل نابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع B أفصولهما على التوالي x_A و x_B هو : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

وبما أن $\vec{F} = -\vec{F}'$ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو :

يتعلق شغل قوة الارتداد $\vec{F}$ بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

التمرين 1

أحسب شغل القوة المطبقة على A الطرف الحر لنابض صلابته $K = 50,0 \text{ N/m}$ عندما يتغير طوله بالمقدار x انطلاقا من طوله البدئي ℓ_0 في الحالتين التاليتين :

1 - إطالة النابض من $x_0 = 0 \text{ cm}$ إلى $x_1 = 5 \text{ cm}$

2 - انضغاط النابض من $x_0 = 0 \text{ cm}$ إلى $x_2 = -5 \text{ cm}$

3 - عندما تتغير x من x_1 إلى x_2

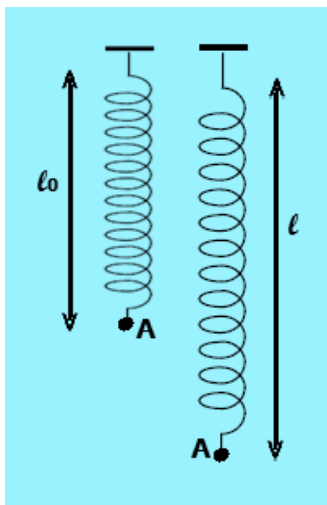
4 - استنتج قيمة شغل القوة المطبقة من طرف النابض على يد المجرب

الجواب :

$\vec{F}'$: القوة المطبقة على A ، الطرف الحر للنابض :

لدينا :

$$W_{A_0 \rightarrow A_1}(\vec{F}') = \int_{x_0}^{x_1} Kx dx = \frac{1}{2} K(x_1^2 - x_0^2) = K \frac{x_1^2}{2} = 6,5 \times 10^{-2} \text{ J} \quad 1$$



$$W_{A_0 \rightarrow A_2}(\vec{F}') = \int_{x_0}^{x_2} Kx dx = \frac{1}{2} K(x_2^2 - x_0^2) = K \frac{x_2^2}{2} = 6,5 \times 10^{-2} \text{ J} \quad - 2$$

$$W_{A_2 \rightarrow A_1}(\vec{F}') = \int_{x_2}^{x_1} Kx dx = \frac{1}{2} K(x_1^2 - x_2^2) = 0 \text{ J} \quad - 3$$

$$- 4$$

$$W_{A_0 \rightarrow A_1}(\vec{F}) = - W_{A_0 \rightarrow A_1}(\vec{F}') = -6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$W_{A_0 \rightarrow A_2}(\vec{F}) = - W_{A_0 \rightarrow A_2}(\vec{F}') = -6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$W_{A_2 \rightarrow A_1}(\vec{F}) = - W_{A_2 \rightarrow A_1}(\vec{F}') = 0 \text{ J}$$

II _ طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يختزن طاقة ترتبط بحالة تشوهه تسمى طاقة الوضع المرنة . في الحالة التي يكون فيها النابض لا مطالا ولا مضغوطا فإن طاقة الوضع المرنة تكون منعدمة .
عندما يطبق المجرب قوة $\vec{F}'$ على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها x_A في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها x_B حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = - W_{A \rightarrow B}(\vec{F}')$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B) \quad \text{نضع أن}$$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم _ نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي تختزنه هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعدمة في الموضع الموافق للأفصول $x=0$ أي عندما يكون النابض لا مطال ولا

مضغوط ، حيث (C=0) فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو : $E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي

ال جول . و $\Delta\ell = x$ إطالة النابض في حالة نابض أفقي و k صلابته .

$${}^B_A\Delta E_{pe} = - W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \quad \text{ملحوظة :}$$

تابع التمرين 1 :

5 _ استنتج الوضع المرنة في كل حالة باعتبار أن طاقة الوضع المرنة منعدمة عندما يكون النابض غير مشوه .

الجواب :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 + Cte \quad \text{، حسب الحالة المرجعية لدينا } x = \Delta\ell = 0 \text{ أي أن } Cte = 0 \text{ وبالتالي فإن } E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2$$

$${}^B_A\Delta E_{pe} = - W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \quad \text{أو بطريقة أخرى :}$$

أي أن

$$\Delta E_{pe}^{A_1} = - W_{A_0 \rightarrow A_1}(\vec{F}) = 6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$\Delta E_{pe}^{A_2} = - W_{A_0 \rightarrow A_2}(\vec{F}) = 6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$\Delta E_{pe}^{A_1} = - W_{A_2 \rightarrow A_1}(\vec{F}) = 0 \text{ J}$$

III - الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته m وسرعته v في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على طاقة حركية E_C بحيث $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ وحدة E_C في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره .
بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب .

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{بحيث أن } x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

2 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة t هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .
طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقة مع المستوى الأفقي المار من G مركز قصور المتذبذب ($E_{pp} = 0$) نحصل

على $E_p = E_{pe}$ أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم صلب ونابض أفقي هو : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي : $E_{pe} = 0$ عند التوازن أي أن $x = 0$ نحصل على التعبير التالي :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

أ - حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص T_0 ، فيكون عندنا انحفاظ الطاقة

الميكانيكية للمجموعة . $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مهما كانت قيم x و v

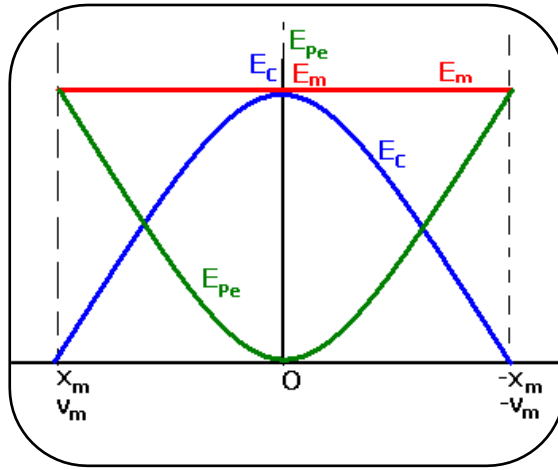
— عندما نأخذ الاستطالة قيمتها القصوى x_m فإن الطاقة الميكانيكية $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

— عندما تكون الاستطالة منعدمة $x = 0$ فإن $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ وبالتالي فإن $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ ومنه نستنتج العلاقة :

$$v_m = x_m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = kx \frac{dx}{dt} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظم E_{pe} و E_c و E

خلاصة : في غياب الاحتكاكات تتحفظ الطاقة

الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

ب - حالة احتكاكات غير مهمة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا

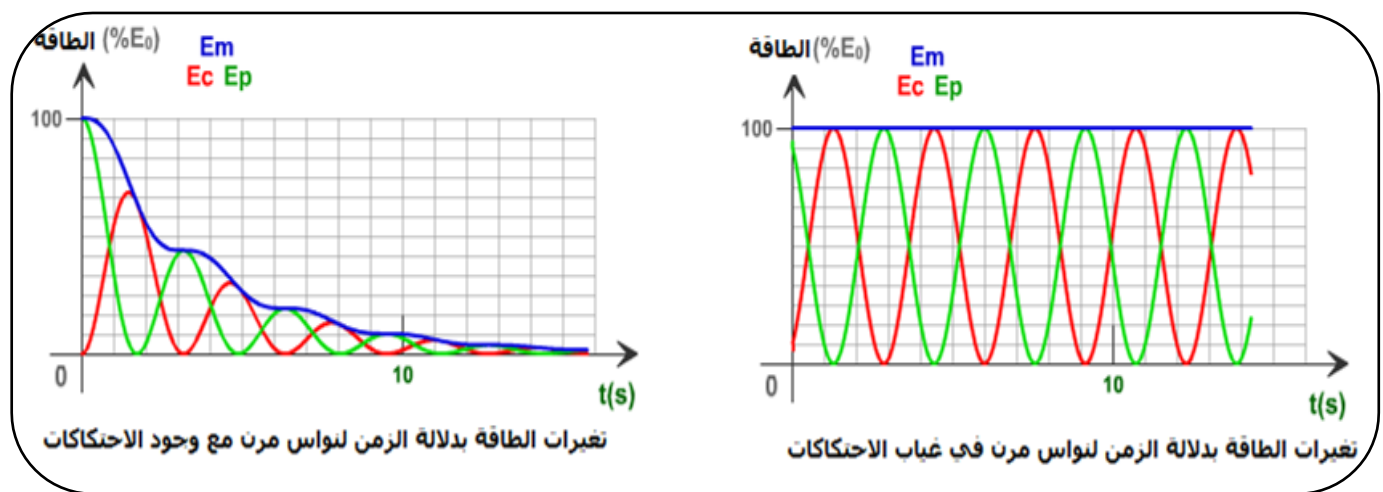
مع الزمن t ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا

دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع

الزمن t إلى الانتقال الحراري (وجود الاحتكاكات)

شكل منحني تغيرات E_{pe} و E_c و E بدلالة الزمن :



IV - الدراسة الطاقية لنواس اللي .

1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب - السلك }

بما أن السلك كتلته مهمة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول

محور ثابت (Δ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي : $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$ حيث J_{Δ} عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور

(Δ) المجسد من طرف السلك و $\frac{d\theta}{dt}$ السرعة الزاوية لدوران القضيب .

2 - طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه C في حركة تذبذبية حول محور (Δ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) هو J_{Δ}

. نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا : θ_1 و θ_2 .

جرد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته : $\vec{P}$ وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب $\vec{R}$ وإلى مزدوجة اللي عزمها

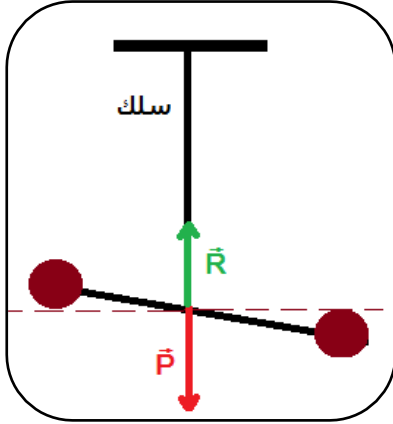
$$M_C = -C.\theta$$

نطبق المبرهنة : $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_C$ بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) فإن

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_1^2 = W_C$$

شغلها منعدم أي أن

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي : $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$ نأخذ $\varphi = 0$ لتبسيط العمليات الحسابية .



$$\theta_1 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \theta_2 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right) \text{ أي أن}$$

$$\dot{\theta}_1 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \dot{\theta}_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right) \text{ وتعويض}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \theta_1^2 - \frac{1}{2} C \theta_2^2 \quad (1) \text{ هذه التعابير في العلاقة}$$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأضول الزاوي من θ_1 إلى θ_2 . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب - السلك } وهي

$$\text{طاقة الوضع لي. } W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2) \text{ بحيث أن } E_{pt}(1) = \frac{1}{2} C \theta_1^2$$

$$\text{و } E_{pt}(2) = \frac{1}{2} C \theta_2^2 \text{ وبالتالي نعرف طاقة الوضع لي بالمقدار التالي :}$$

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte, \quad Cte \text{ ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية}$$

3 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة

$$E_m = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte \text{ تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو :}$$

أ - في حالة احتكاكات مهمة .

نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية $J_A \ddot{\theta} + C\theta = 0$.

انطلاقاً من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير E_m

$$\frac{dE_m}{dt} = J_A \ddot{\theta} \dot{\theta} + C\theta \dot{\theta} = \dot{\theta} (J_A \ddot{\theta} + C\theta) = 0 \Rightarrow E_m = cte \text{ بالنسبة للزمن :}$$

أي أن الطاقة الميكانيكية تحفظ .

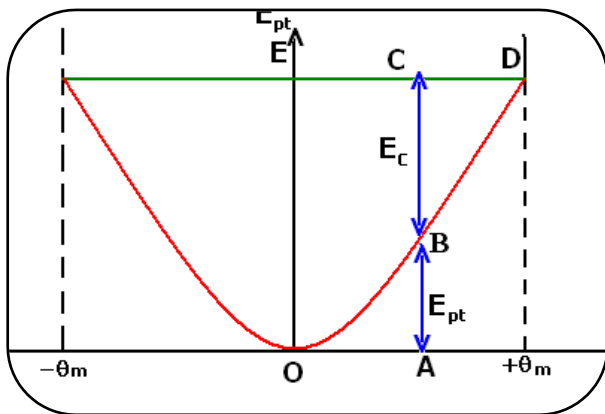
$$\text{ويمكن أن نبين كذلك انطلاقاً من المعادلة الزمنية } \theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$\text{أن هذه الثابتة هي : } E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = cte$$

خلاصة : تحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس لي حر وغير مخمد :

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = cte$$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :



من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال الذبذبات الحرة في المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

ب - في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكية للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

V _ الدراسة الطاقة للنواس الوازن

نعتبر المجموعة النواس الوازن {الحامل - الجسم S} بحيث أن J_{Δ} عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

● **الطاقة الحركية للمجموعة :** يتوفر النواس الوازن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض : $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$

● **طاقة الوضع الثقالية للمجموعة**

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو :

$E_{pp} = mgz + cte$ حيث m كتلة الجسم S و z أنسوب مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O, \vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .

– **الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن.**

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + cte$$

مثال :

حسب الشكل : $z = z_0 + h$

بحيث أن $h = O'G - O'G \cos \theta$ نضع $O'G = d$

$$z = z_0 + d(1 - \cos \theta)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$$cte = -mgz_0 \text{ أي أن } E_{pp} = 0 \text{ عند } z = z_0$$

$$E_m = mgd(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta} \sin \theta + J_{\Delta} \ddot{\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} (mgd \sin \theta + J_{\Delta} \ddot{\theta}) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن في

مجال الثقالة ثابتة . إذن النواس الوازن مجموعة محافظة

– **مخططات الطاقة**

أ _ الحالة العامة

* التمثيل المباني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

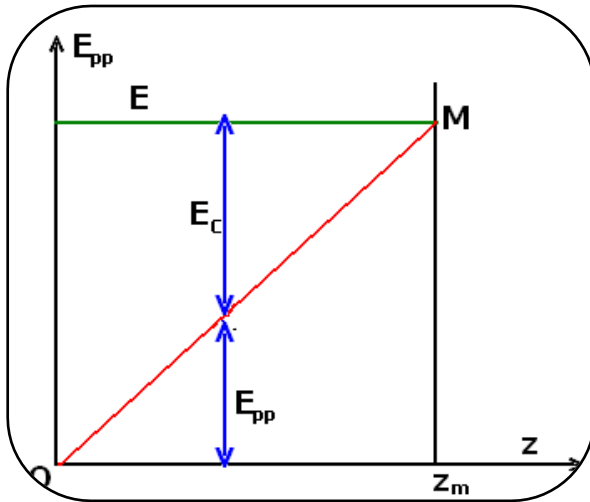
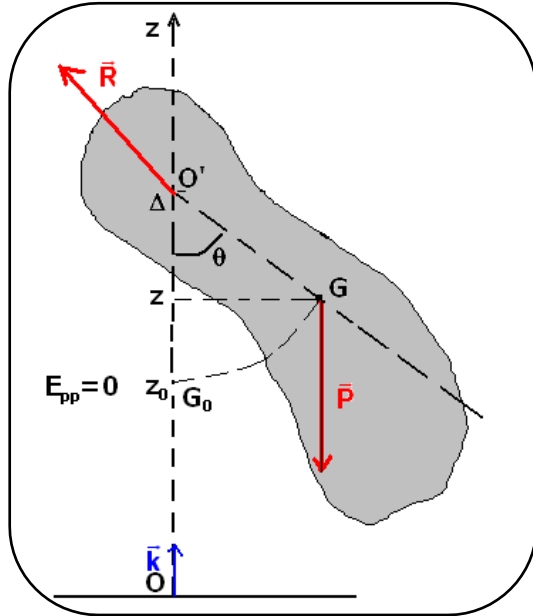
$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$

$$E_m - E_{pp} = E_C$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M $E_{pp} = mgz_M$ و $E_C = 0$



$$E_m = E_{pp} = mgz_M$$

أي أن z لا يمكنها أن تتجاوز z_M يعني أن $z < z_M$

$$E_C = E_m = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \text{ و } E_{pp} = 0 \text{ : النقطة } O$$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية E_C تزداد طاقة الوضع E_{pp} إلى أن تصبح $z = z_m$ فيتوقف الجسم أي أن $E_C = 0$

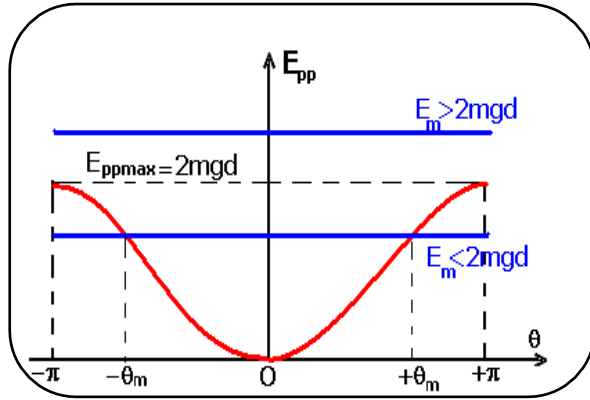
ب - حالة النواس الوازن

طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية $E_{pp} = 0$ بالنسبة $z = z_0$ في هذه الحالة $E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta)$

مخططات الطاقة

الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن $E_m = E_{pp} + E_C$

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta) \text{ طاقة الوضع الثقالية } E_{pp} = f(\theta) \text{ حساب تغيرات } E_{pp}(\theta)$$



$$\frac{dE}{d\theta} = mgd \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta = \pi \text{ أو } \theta = -\pi$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq E_{pp} \leq 2mgd$$

الحالة الأولى:

$$E_m > 2mgd \text{ و } E_m = E_{pp} + E_C \text{ أي أن } E_C > 0$$

وبالتالي فالنواس الوازن لا يتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور (Δ)

الحالة الثانية:

$$E_m < 2mgd \text{ أي أن } E_C = E_m - E_{pp} \text{ وبما أن } E_C \geq 0 \text{ في هذه الحالة}$$

تتعدم الطاقة الحركية للنواس الوازن بالنسبة لقيمتين θ_m و $-\theta_m$ في

هذه الحالة للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها

$$\Delta E_C = -\Delta E_{pp} \text{ الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية}$$

$$\text{في حالة ذبذبات ذات وسع صغير } \sin \theta \approx \theta \text{ و } \sin \theta \approx \theta \text{ و } \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_p = mgd \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = mgd \frac{\theta^2}{2}$$

