

المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة تصحيح التمارين

تمرين 1

1 - 1 تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg - K\Delta\ell = 0$

$$\Delta\ell = \frac{mg}{K} \text{ إذن } \Delta\ell = 2,5\text{cm} \text{ تطبيق عددي}$$

2 - 1 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك $\vec{P} + \vec{F}' = m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$$mg - K\Delta\ell' = m\ddot{z} \text{ بحيث أن } \Delta\ell' \text{ إطالة النابض عند اللحظة } t \text{ } \Delta\ell' = \Delta\ell + z \text{ عند التوازن } mg - K\Delta\ell = 0 \text{ إذن } -Kz = m\ddot{z} \text{ أي}$$

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0 \text{ أن المعادلة التفاضلية للحركة هي}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \text{ نضع } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ وتصبح المعادلة}$$

إذن فالحركة مستقيمة جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2 - 2 المعادلة الزمنية للحركة

$$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ بحيث أن}$$

$$\omega_0 = 20\text{rad/s} \text{ و } Z_m = 4.10^{-2}\text{m} \text{ عند اللحظة}$$

$$t=0 \text{ عندنا } z=Z_m \text{ أي أن } \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z = 4.10^{-2} \cos(20t)$$

$$V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ 2 - 3 نبين أن}$$

$$v = -Z_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ وذلك باشتقاق } z(t) \text{ في اللحظة } t$$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوى $V_1 = \pm Z_m \omega_0$ وبما أنه يمر

$$\text{لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة } \vec{k} \text{ أي أن } \vec{V}_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \vec{k} \text{ أي أن } V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$V_1 = 0,8\text{m/s} \text{ تطبيق عددي}$$

3

الهواء

$$V_0 = -V_1 \text{ تسارع الجسم هو } a=g \text{ ونأخذ } z_0=0 \text{ والسرعة البدئية}$$

$$z = 5t^2 + 0,8t$$

تمرين 2

1 - المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور Δ

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة (S) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة (S) :

$\vec{P}$ و $\vec{R}$ تأثير المحور على الجسم (S) .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg.OH$$

$$OH = OG \sin \theta$$

لنحدد OG بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة (S) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2}}{2m}$$

ونختار O متطابقة مع المحور Δ . أي أن $\overrightarrow{OG_1} = 5R\vec{i}$ و $\overrightarrow{OG_2} = 11R\vec{i}$

$$OG = 8R \text{ وبالتالي } \overrightarrow{OG} = \frac{16R}{2}\vec{i} = 8R\vec{i}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg.OG \sin \theta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -16mgR \sin \theta$$

$$16mgR \sin \theta + J_\Delta \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \theta = 0 \text{ فإن } \sin \theta \approx \theta \text{ أي أن } \theta_m = 10^\circ$$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ التالي}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{16mgR}} = 1s \text{ دورها الخاص يكتب على الشكل التالي :}$$

2 - المعادلة الزمنية لحركة المجموعة (S) هي :

$$\theta_m = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \text{ بحيث } \theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

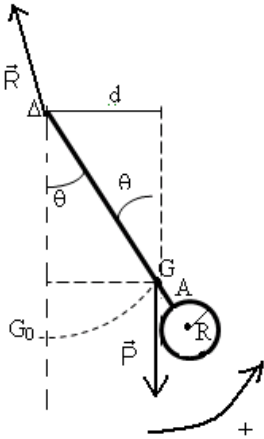
$$\theta(0) = \theta_m = \theta_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ عند اللحظة } t = 0 \text{ لدينا}$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2\pi t)$$

5 - الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t)$$

تكون الطاقة E_C قصوى



$$-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوى للطاقة الحركية هي : $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي : $E_{Cmax} = 6.10^{-3} J$

6 - نستنتج تعبير طاقة الوضع التفاضلية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهمة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر

منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوى أي أن الطاقة الميكانيكية قصوى $E_{Cmax} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$ ونعتبر

أن طاقة الوضع منعدمة أي أن $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$. و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة

الميكانيكية هي $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 (1 - \sin^2(\omega_0 t))$$

$$E_p = E_{Cmax} \cos^2(2\pi t)$$

تمرين 3

I - الدراسة التحريكية

1 - المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق $\vec{P}$ و $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

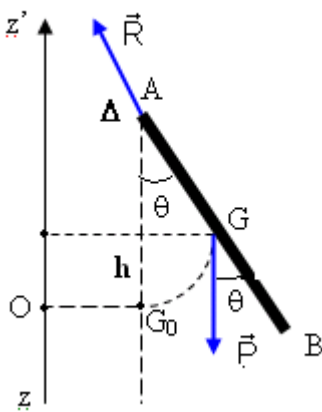
حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 - المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التوافق (لا يتعلق دور حركة النواس بوسع التذبذبات في حالة التذبذبات ذات وسع صغير)

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{10} rad$ نعتبر أن $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0 \quad \text{بما أن} \quad J_{\Delta} = \frac{1}{3} ML^2 \quad \text{إذن فالمعادلة التفاضلية هي} \quad \ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \theta = 0$$



3 - حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \text{ تطبيق عددي : } T_0 = 1,26s$$

II - الدراسة الطاقية

1 - نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي : $E_p = Mgz + C$ حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية

وحسب الشكل جانبه

$E_p = 0$ بالنسبة $z = 0$ إذن $C = 0$ وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي $E_p = Mgz$ بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$E_p = \frac{MgL(1 - \cos \theta)}{2} \text{ ومنه}$$

2 - أ

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل $\theta = 0$ و $E_m = E_c = 0,5J$ و

$$E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}J_A\dot{\theta}_m^2 = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{J_A}} = 5,77 \text{ rad / s}$$

ب - موضع الساق عندما تكون $E_c = 0,25J$ أي أن

$$E_m = E_p + E_c \Rightarrow E_p = E_m - E_c = 0,5 - 0,25 = 0,25J \text{ فحسب الشكل } \theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

الحالة الثانية :

عندما تكون $E_c \neq 0 \Rightarrow E_m > E_p$ مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور Δ .

• القيمة القصوى والقيمة الدنيا للسرعة الزاوية $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوى عندما تكون الطاقة الحركية E_c قصوى ونرمز لها ب $E_{c \max}$ حيث تكون

طاقة الوضع دنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون $\theta = 0$ أي $E_{p \min} = 0$ وفي هذه

$$E_m = E_{c \max} = \frac{1}{2}J_A\dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_A}} \text{ الحالة}$$

$$J_A = \frac{1}{3}ML^2 = 3.10^{-2} \text{ kg.m}^2 \text{ ولأن } E_m = 1,5J \text{ حسب الشكل هي : } E_m = 1,5J$$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_A}} = 10,8 \text{ rad / s}$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية $E_{c \min}$ وتكون طاقة الوضع قصوى وفي هذه

الحالة

$$E_m = E_{c \min} + E_{p \max} \Rightarrow E_{c \min} = E_m - E_{p \max}$$

$$\frac{1}{2}J_A\dot{\theta}_{\min}^2 = E_m - E_{p \max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p \max})}{J_A}} \text{ أي أن}$$

حسب المبيان لدينا :

$$\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_{\Delta}}} = 4,08 \text{ rad/s} \quad \text{وبالتالي : } E_{p\max} = 1,5 \text{ J و } E_m = 1,75 \text{ J}$$

تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة P أن طوله هو ℓ_0 عند وضع الجسم (S) فوق الكفة يصبح طول النابض ℓ_1 ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسى $(O, \vec{k})$ موجه نحو الأعلى .

1 _ عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة

$\vec{P}$ و $\vec{F}$ نطبق شرط التوازن في المركز G

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz}$$

$$\vec{P} - k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} = \vec{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$$

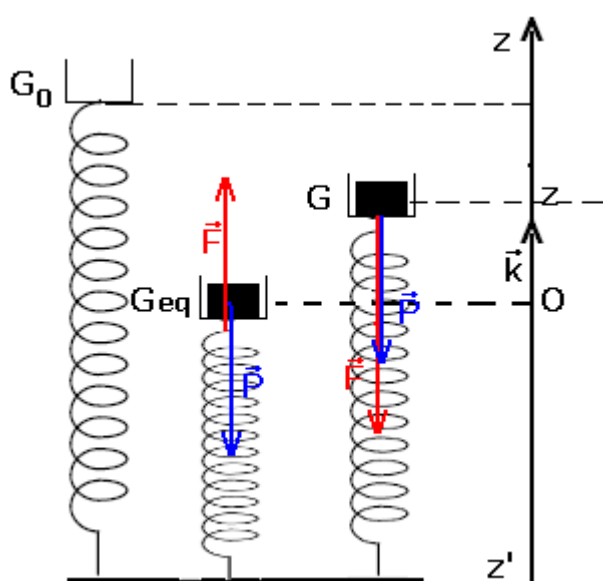
$$|\Delta\ell| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$$

$$|\Delta\ell| = 1 \text{ cm}$$

2 _ المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة

$$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$



$$-k \overrightarrow{G_0 G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow -k(\overrightarrow{G_0 G_{eq}} + \overrightarrow{G_{eq} G}) + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$-k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} - k \overrightarrow{G_{eq} G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{P} - k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} = \vec{0} \quad \text{حسب السؤال السابق لدينا}$$

$$-k \overrightarrow{G_{eq} G} = (m_1 + m_2)\vec{a} \quad \text{أي أن}$$

$$-kz = (m_1 + m_2)\ddot{z} \quad \text{نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz :}$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m_1 + m_2}z = 0 \quad \text{إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي :}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \quad \text{نستنتج الدور الخاص للحركة :}$$

$$\text{حساب } T_0 :$$

$$T_0 = 0,2 \text{ s}$$

2 _ 2 المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة $t=0$

$$z(0) = Z_m \cos \varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos \varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة $t=0$

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi$$

$$\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi \text{ إذن } \dot{z}(0) < 0$$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos \varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,2}{Z_m} = \cos \varphi \\ \frac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad } \text{ و بالنسبة لـ } Z_m = 0,203m$$

$$z(t) = 0,2 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

3- نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$ بما أنه الحالة المرجعية تم

اختيارها في المستوى حيث $z = 0$ فإن $C = 0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$ حيث a إطالة النابض

$$0 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \text{ إذن } z=0 \text{ مرجعية ونختار كحالة مرجعية } a = |\Delta\ell| - z$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z \text{ عند نشر هذه العلاقة نحصل على } E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

$E_p(t)$ طاقة الوضع الكلية للمجموعة و $E_c(t)$ الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0 \text{ نعلم أنه عند التوازن}$$

$$\text{إذن } E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{z} + kz = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{(m_1 + m_2)}z$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{(m_1 + m_2)}z = 0$$

3 - 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة 0 لأول مرة .

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب z_m و $z=0$

$$\frac{1}{2}kZ_m^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0$$

$$V = \sqrt{\frac{kZ_m^2}{m_1 + m_2}} \text{ يعني أن } V = 1,2 \text{ m/s تطبيق عددي}$$

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع $z_i > z$ دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة $\vec{P} + \vec{R} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz $-(m_1 + m_2)g + R = (m_1 + m_2)\ddot{z}$ حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

نعوض $\ddot{z}$ في العلاقة

$$-(m_1 + m_2)g + R = -(m_1 + m_2)\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

$$R = (m_1 + m_2)g - kz$$

لكي لا يغادر الجسم الكفة يجب أن تكون $R > 0$ هذا يعني أن $z_i < \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

نضع $Z_m = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$ لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول 0 يجب $z_i < Z_m \Rightarrow z_i < 1 \text{ cm}$

مما يبين أن دراستنا النظرية لا يمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني

4 - تعبري $Z_{\max}$ و $z_{\max}$

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

$$E_m = \frac{1}{2}m_1V^2 + 0 \text{ : قبل الانفصال}$$

$$E'_m = 0 + m_1gz_{\max} \text{ : بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow z_{\max} = \frac{V^2}{2g} \text{ تطبيق عددي } z_{\max} = 7,2 \text{ cm}$$

بالنسبة للناض والكفة

$$E_m = \frac{1}{2}m_2V^2 + 0 + 0 \text{ : مباشرة قبل الانفصال}$$

$$E'_m = \frac{1}{2} k Z_{\max}^2 + m_2 g Z_{\max} \quad \text{بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}^2 + 2m_2 g Z_{\max} - m_2 V^2 = 0$$

$$Z_m^2 + 4Z_m - 0,29 = 0 \quad \text{معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$Z_{\max} = 0,07m \quad \text{نحتفظ بالحل الموجب}$$

تمرين 5

1 - طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك
جهد القوى المطبقة على السلك :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$$\mathcal{M}_C = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{أي أن } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \text{ و } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0 \text{ لدينا } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$ خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة

حركة القرص حركة دورانية جيبة .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}} \quad \text{دورها هو :}$$

2 - حساب ثابتة اللي بالنسبة لـ $T_0 = 0,92s$:

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\Delta}}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_{\Delta}}{T_0^2} = 0,233.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

3 - طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جهد القوى المطبقة على النواس الجديد :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C_1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{وبمـ } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0 \text{ و}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \quad \text{فإن } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{C_1} = -C_1 \theta \text{ و } \mathcal{M}_{C_2} = -C_2 \theta$$

حسب المعطيات لدينا أن C_1 تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن $C_1 = \frac{K}{L-z}$ و $C_2 = \frac{K}{z}$ أي أن

ثابتة اللي للسلك الذي طوله L كذلك تتناسب عكسيا مع الطول : $C = \frac{K}{L}$

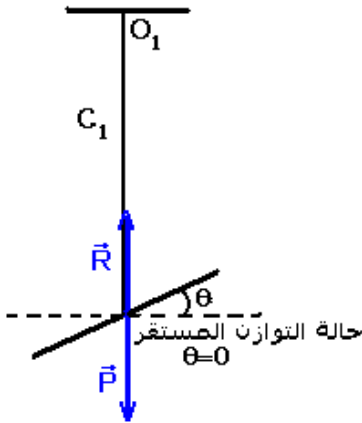
$$-K \left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z} \right) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{في المعادلة } C_2 \text{ و } C_1 \text{ نعوض } -C_1 \theta - C_2 \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

لدينا كذلك : $K = C.L$ أي

$$-C.L \left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z} \right) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)} C = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_{\Delta}} \theta = 0$$

ب - تعبير الدور T'_0 :



$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{z(L-z).J_\Delta}{L^2.C}} = \frac{T_0}{L} \sqrt{z(L-z)}$$

حساب T'_0 في حالة $z = \frac{L}{3}$

$$T'_0 = \frac{T_0}{L} \sqrt{\frac{L}{3} \left(\frac{2L}{3} \right)} = \frac{T_0}{3} \sqrt{2} = 0,43s$$

ج - لنبين أن T'_0 تأخذ قيمة قصوى بالنسبة لـ $z = z_{\max}$
نحسب المشتقة الأولى لـ T'_0 :

$$\frac{dT'_0}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$$

$$z = \frac{L}{2}$$

$$T'_{0\max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s$$

تمرين 6

1 - السرعة الزاوية القصوى للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنايى الحزوني $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ نختار

كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النايى غير مشوه ، عند موضع التوازن $\theta = 0$ يكون النايى غير مشوه $E_p = 0$ أي أن $Cte = 0$ و

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوى عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي : $E_m(0) = E_m(\text{equilibre})$ بحيث أن $E_m(0) = E_p(0) + E_c(0)$ الطاقة

الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية $E_c(0) = 0$ و $E_p(0) = \frac{1}{2}C\theta_m^2$ يعني أن

$$(1) E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

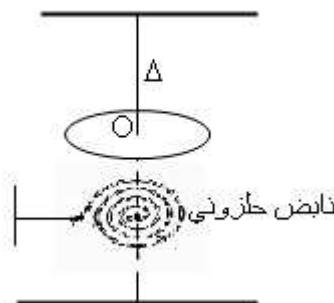
عند مروره من موضع توازنه $E_p = 0$ و $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$ يعني أن $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$ (2)

$$\frac{1}{2}C\theta_m^2 = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}_{\max} = 1,66 \text{ rad / s}$

2 - حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة



$$\frac{1}{2} J_A \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{1}{2} C \theta^2 + E_C(t) \Rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} C \theta_m^2 - \frac{C \theta_m^2}{8}$$

$$E_C(t) = \frac{3C \theta_m^2}{8}$$

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{C \theta_m^2}{8} : \text{حساب طاقة الوضع}$$

$$E_p = 0,014.10^{-4} J \text{ و } E_C = 0,042.10^{-4} J : \text{تطبيق عددي}$$

تمرين 7

1 - أ. نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A : $\sum \mathcal{M}_A(\vec{F}_i) = J_A \ddot{\theta}$

جرد القوى المطبقة على الجسم A :

$\vec{P}$ وزن الجسم A

$\vec{T}$ توتر القضيبي

$\vec{R}$ تأثير المحور على القضيبي .

$$\mathcal{M}_A(\vec{P}) + \mathcal{M}_A(\vec{R}) + \mathcal{M}_A(\vec{T}) = J_A \ddot{\theta}$$

القوة $\vec{T}$ والقوة $\vec{R}$ يتقاطعا مع المحور Δ فإن عزمهما

منعدم . أي أن $\mathcal{M}_A(\vec{P}) = J_A \ddot{\theta}$

$$\mathcal{M}_A(\vec{P}) = -mgd \text{ بحيث أن } d = l \sin \theta \text{ إذن}$$

$$-mg \ell \sin \theta = J_A \ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{J_A} \sin \theta = 0 \text{ في حالة التذبذبات ذات الوسع}$$

صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع

$$\sin \theta \approx \theta$$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{m \ell^2} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية

جيبية .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} : \text{لهذا النواس} \text{ ب - تعبیر الدور } T_0 = 0,4\pi s = 1,26s : \text{حساب الدور } T$$

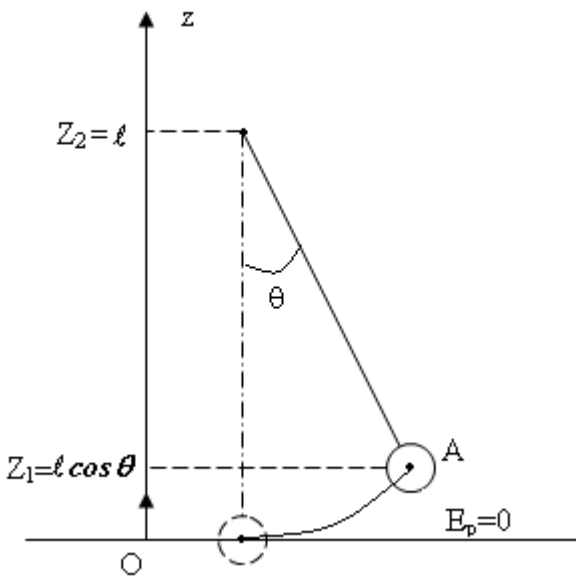
2 - أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيبي :

$$E_C = E_C(\text{tige}) + E_C(A) + E_C(\text{terre})$$

$$E_C = \frac{1}{2} J'_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 + 0$$

نعلم أن كتلة القضيبي مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة

$$E_C = E_C(A) : \text{المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة}$$



$$E_C = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 : \text{ ب - تعبير الطاقة الحركية للمجموعة :}$$

ج - طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية : $E_p = mgz + cte$ نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$$E_p = mg\ell(1 - \cos \theta) \text{ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن } \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \text{ وفي هذه الحالة}$$

تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

د - الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \frac{g}{l} \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} ml\theta_m^2 \left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} ml\theta_m^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن $E_m = Cte$

3 - 1 - نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوى α_m

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgl(1 - \cos \alpha_m)$$

$$mv_A^2 = 2mgl - 2mgl \cos \alpha_m$$

$$\cos \alpha_m = 1 - \frac{v_A^2}{2gl}$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{3} \text{ تطبيق عددي نجد}$$

أ - السرعة الانوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :

$$v'_A = 2\sqrt{gl} \text{ يعني أن } \cos \alpha_m = -1 \text{ أي أن } \alpha_m = \pi$$

$$v'_A = 4m / s \text{ تطبيق عددي}$$

ب - حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورانية حول المحور Δ أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور Δ .