تصحيح تمارين حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تصحيح تمرين 1:

1-1-طبيعة حركة النقطة M :

من خلال المبيان الممثل للسرعة الزاوية ω بدلالة الزمن يتبين أن السرعة الزاوية دالة تآلفية بالنسبة للزمن وبالتالي فحركة النقطة M دائرية متغيرة بانتظام .

2-1-قيمة التسارع الزاوي :

يمثل التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ المعامل الموجه للمنحنى $\omega = f(t)$ نكتب معادلة المنحنى:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{4-1}{4-0} = 0,75\, rad.s^{-1}$$

السرعة الزاوية عند اللحظة $t = 0$ مبيانيا تساوي:

$$\dot{\theta}_0 = 2\, rad.s^{-1}$$

- معادلة السرعة الزاوية :

$$2\omega = 0,75t + 2$$

1-2-المعادلة الزمنية لحركة النقطة M :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

$$\theta(t) = 0,375t^2 + 2$$

2-2-عدد الدورات المنجزة بين اللحظتين t_1 و t_2:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi n$$

$$2\pi n = [0,375 \times (5,2)^2 + 2 \times 5,2] - [0,375 \times 4^2 + 2 \times 4] = 6,54\, rad$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 1,04$$

3-2-التسارع المماسي والتسارع المنظمي:

$$a_t = r\ddot{\theta}$$

$$a_t = 0,1 \times 0,75 = 7,5.10^{-2} m.s^{-2}$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = 0,75 \times 2 + 2 = 3,5\, rad.s^{-1}$$

$$a_n = 0,1 \times 3,5^2 = 1,225\, m.s^{-2}$$

منظم متجهة التسارع :

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2}$$

$$a = \sqrt{3,5^2 + 1,225^2} = 1,23\ m.s^{-2}$$

3-مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ:

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 6.10^{-2} \times 0,75 = 4,5.10^{-2} N.m^{-1}$$

تصحيح تمرين2:

1-السرعة الزاوية البدئية :

$$\omega_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi N}{60}$$

ت.ع:

$$\omega_0 = \frac{2\pi \times 120}{60} = 12,6\ rad.s^{-1}$$

2-باعتبار المنحى الموجب للدوران و بما أن شدة القوة ثابتة ، فإن تعبير العزم يكتب :

$$M_\Delta(\vec{F}) = -Fd$$

المسافة بين خط تأثير القوة $\vec{F}$ ومحور الدوران هي: $d = R$

$$M_\Delta(\vec{F}) = -FR$$

الأسطوانة تخضع لوزنها $\vec{P}$ و تأثير محور الدوران : $\vec{R}$ و للقوة $\vec{F}$.

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على الأسطوانة :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير كل من القوتين $\vec{P}$و$\vec{R}$ يمر من محور الدوران (Δ) ، فإن :

$$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

$$0 + 0 - F.R = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{F.R}{J_\Delta}$$

3-تعبير السرعة الزاوية :

من خلال تعبير التسارع الزاوي يتبين أن $\ddot{\theta} = cte$ وبالتالي حركة الأسطوانة دورانية متغيرة (متباطئة) بانتظام .

معادلة السرعة الزاوية تكتب:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \omega_0$$

$$\omega = -\frac{F.R}{J_\Delta}t + \omega_0$$

4- مدة الكبح:

عندما تتوقف الأسطوانة ، تنعدم سرعتها الزاوية :

$$0 = -\frac{F.R}{J_\Delta}t + \omega_0$$

$$\frac{F.R}{J_\Delta}t = \omega_0$$

$$t = \frac{J_\Delta.\omega_0}{F.R}$$

$$t = \frac{m.R^2.\omega_0}{2F.R} = \frac{m.R.\omega_0}{2F}$$

ت.ع:

$$t = \frac{100 \times 1.2}{2 \times 50} = 1,2s$$

تصحيح التمرين 3:

1-1-حسب مبيان الشكل *(2)* فإن المنحنى $\theta = f(t)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب:

$$\theta(t) = \alpha t^2 + \beta$$

$\beta = 2\,rad$ و α العامل الموجه : $\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta t^2} = \frac{12-2}{2-0} = 5\,rad.s^{-2}$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = 5t^2 + 2$$

2-1-طبيعة حركة البكرة:

لدينا : $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(5t^2 + 2)\right] = \frac{d}{dt}(10t)$$

$$\ddot{\theta} = 10\,rad.s^{-2} = cte$$

نستنتج أن حركة البكرة (P) دورانية متغيرة بانتظام .

3-1-المعادلة الزمنية $z(t)$:

بما أن الخيط غير قابل للإمتداد ، فإن تسارع G مركز قصور الجسم (S) يكتب:

أي: $a = r\ddot{\theta}$ $a = 0,1 \times 10 = 1m.s^{-2}$

حركة G مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها تكتب :

$$z(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + z_0$$

حسب الشروط البدئية : $z_0 = 0$ و $V_0 = 0$ وبالتالي المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = 0,5t^2$$

2-يخضع الجسم (S) أثنا ء حركته الى القوى التالية :

$\vec{P}$ وزنه و $\vec{T}$ تأثير الخيط .

نعتبر المعلم $(O,\vec{k})$ غاليليا و نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور Oz :

$$mg - T = ma$$
$$T = m(a + g)$$

ت.ع:

$$T = 0,2 \times (10 - 1) = 1,8\ N$$

3-تخضع البكرة أثناء دورانها الى التأثيرات التالية :

$\vec{P'}$: وزنها .

$\vec{T'}$: تأثير الخيط .

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران .

تأثير مزدوجة الإحتكاك عزمها M.

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$M_\Delta\left(\vec{P'}\right) + M_\Delta\left(\vec{T'}\right) + M_\Delta\left(\vec{R}\right) + M = J_\Delta\ddot{\theta} \quad (1)$$

باعتبار المنحى الموجب للدوران :

$M_\Delta\left(\vec{P'}\right) = M_\Delta\left(\vec{R}\right) = 0$ لأن خط تأثير كل من القوتين $\vec{R}$ و $\vec{P'}$ يمر من محور الدوران (Δ) .

$$M_\Delta\left(\vec{T'}\right) = T'r$$

العلاقة (1) تكتب:

$$0 + 0 + T'r + M = J_\Delta\ddot{\theta}$$

كتلة الخيط مهملة إذن : $T = T'$

$$M = J_\Delta\ddot{\theta} + Tr$$

ت.ع:

$$M = 10^{-2} \times 10 - 1,8 \times 0,1 = -8.10^{-2} N.m$$

4- عدد الدورات المنجزة بين لحظة تقطع الخيط ولحظة توقف البكرة:

عندما يتقطع الخيط تصبح البكرة خاضعة للجميع التأثيرات السابقة باستثناء توتر الخيط. العلاقة الأساسية للديناميك تكتب :

$$M_\Delta\left(\vec{P'}\right) + M_\Delta\left(\vec{R}\right) + M = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{J_\Delta} = \frac{-8.10^{-2}}{10^{-2}} = -8 rad.s^{-2}$$

للبكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام ،معادلتها الزمنية تكتب:

$$\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2+\dot{\theta}_0t+\theta_0$$

عند اللحظة t_1 يتقطع الخيط فتكون السرعة الزاوية للبكرة هي : $\dot{\theta}_0$

حسب السؤال الاول : $\theta(t)=5t^2+2$

$$\dot{\theta}(t)=10t$$

عند اللحظة $t_1=2s$ تكون السرعة الزاوية للبكرة :

$$\dot{\theta}(t_1)=10\times 2=20\ rad.s^{-1}$$

وتمثل السرعة الزاوية البدئية للمرحلة الثانية .

حساب t_2:

عند اللحظة t_2 تتوقف البكرة فتكون سرعتها منعدمة أي: $\dot{\theta}(t_2)=0$

تكتب معادلة السرعة في المرحلة الأخيرة :

$$\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}t+\dot{\theta}_0=-8t+20$$

بما أن : $\dot{\theta}(t_2)=0$ أي: $0=-8t_2+20$

$$t_2=\frac{20}{8}=2,5s$$

نعلم أن:

$$\Delta\theta=\theta(t_2)-\theta_0=2\pi n$$

$$-\frac{1}{2}\times 8{t_2}^2+20t_2=2\pi n$$

$$n=\frac{-4\times 2,5^2+20\times 2,5}{2\pi}=3,98\approx 4$$

5-بعد تقطع الخيط يصبح الجسم (S) في سقوط حر، حيث يخضع للوزن فقط بعد إهمال تأثير الهواء.

القانون الثاني لنيوتن يكتب :

$$\vec{P}=m\vec{a}$$

الإسقاط على المحور Oz :

$ma=mg \Longrightarrow a=g=cte$

الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام :

$$z=\frac{1}{2}at^2+V_0t+z_0$$

السرعة البدئية للمرحلة الثانية تساوي السرعة عند اللحظة t_1 للمرحلة الأولى:

$$v(t_2)=r\dot{\theta}(t_1)=0,1\times 20=2m.s^{-1}$$

الأنسوب البدئي z_0 يمثل المسافةالتي قطعها الجسم خلال المرحلة الأولى خلال المدة t_1 :

$$z(t_1)=0,5{t_1}^2=0,5\times 2^2=1m$$

المعادلة الزمنية للجسم (S) بعد اللحظة t_1 :

$$z(t)=5t^2+2t+1$$

تصحيح التمرين 4 :

1-معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$:

المنحنى الممثل للدالة $\dot{\theta} = f(t)$ عبارة عن دالة خطية معادلتها تكتب : $\dot{\theta} = \alpha t$

$$\alpha = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{0,25 - 0} = 40\, rad.s^{-1}$$

$$\dot{\theta(t)} = 40t$$

2-طبيعة حركة (B):

التسارع الزاوي للبكرة يكتب:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 40\, rad.s^{-2} = cte$$

حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام .

3-تعبير n عدد دورات البكرة عند اللحظةt :

المعادلة الزمنية للحركة الدوانية المتغيرة بانتظام تكتب:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

لدينا : $\dot{\theta}_0 = \theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \times 40t^2 = 20t^2$$

عدد الدورات المنجزة خلال المدة t :

$$\theta(t) = 2\pi n$$

$$n = \frac{\theta(t)}{2\pi} = \frac{20t^2}{2\pi}$$

ت.ع:

$$n = \frac{20 \times (1,25)^2}{2\pi} = 4,97 \simeq 5$$

4-طبيعة حركة كل من (S_1) و (S_2):

بنا أن الخيط لاينزلق على مجرى البكرة وغير مدود ، إذا كانت المسافة التي ينتقل بها الجسم (S_1) على $(O,\vec{i})$ هي xفإن المسافة التي ينتقل بها الجسم (S_2) على $(O,\vec{j})$ هي y والقوس الذي يدور به نقطة من مجرى البكرة هو s حيث: $s=x=y=r\theta$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = r\ddot{\theta}$$

للجسمين (S_1) و (S_2) نفس التسارع : $a_1=a_2=r\ddot{\theta}=0,04\text{x}40=1,6 m.s^{-2}$

نستنتج أن حركة كل من (S_1) و (S_2) مستقيمية متغيرة بانتظام .

5-إثبات العلاقة: $a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$:

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S_1) :

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = m_1\vec{a}$$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$$-f + T_1 = m_1 a$$

الإسقاط على $(O,\vec{j})$:

$$R_N - m_1 g = 0 \Rightarrow R_N = m_1 g$$

معامل الإحتكاك يكتب :

$$k = tan\alpha = \frac{f}{R_N} \Rightarrow f = k.R_N = m_1 g k$$

العلاقة (1) تكتب:

$$T_1 = k m_1 g + m_1 a$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S_2) :

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 a$$

الإسقاط على $(O,\vec{j})$:

$$T_2 - P_2 = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 a - m_2 g$$

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك للدوران على البكرة (B):

$$M_\Delta(\vec{T}_1) + M_\Delta(\vec{T}_1) + M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

باعتبار المنحى الموجب للدوران نكتب:

$$-T_1 r + T_2 r = J_\Delta \ddot{\theta}$$

لدينا : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$:

$$T_2 - T_1 = \frac{a.J_\Delta}{r^2}$$

نعوض T_1 و T_2 بتعبيرهما :

$$m_2 a - m_2 g - (k m_1 g + m_1 a) = \frac{a.J_\Delta}{r^2}$$

$$a\left(m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}\right) = g(m_2 - k m_1)$$

نستنتج العلاقة:

$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

لكي تتم حركة (S_1) يجب أن يكون التسارع موجبا أي:

$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}} > 0$$

$$m_2 - m_1.k > 0$$

$$m_2 > m_1.k$$

$$m_2 > 0,16\ kg$$