

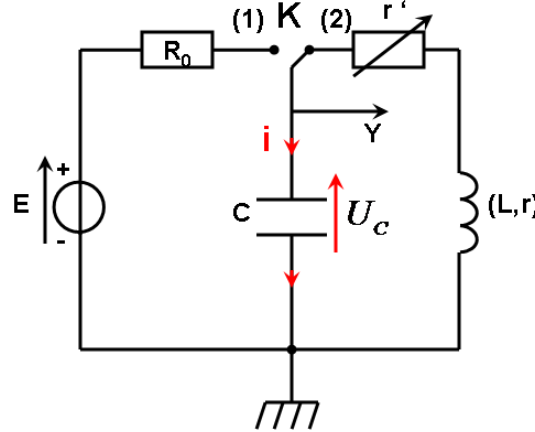
الذبذبات الحرة في الدارة RLC متوالية

Les oscillations libres dans un circuit RLC série

I - تفريغ المكثف :

1 - التركيب التجريبي :

تعتبر التركيب التجريبي التالي :



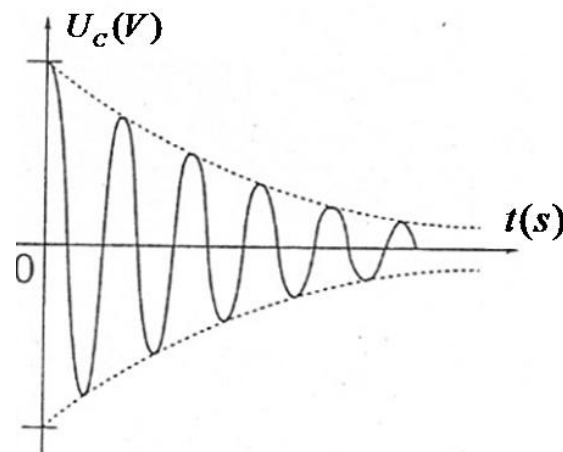
- نشحن المكثف بوضع قاطع التيار K في الموضع (1) .

- نضع قاطع التيار في الموضع (2) فنحصل على دارة RLC متوالية إذا كانت المقاومة R صغيرة نلاحظ أن :

- التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف متناوب أي أنه يتأرجح بين قيم قصوى موجبة و قيم دنيا سالبة , نقول أن تفريغ المكثف تذبذبي .

- وسع التوتر $u_C(t)$ يتناقص مع مرور الزمن نقول أن التذبذبات مخمدة .

- يؤدي تفريغ مكثف مشحون في وشيعة دارة RLC متوالية إلى ظهور ذبذبات حرة و مخمدة , نقول أن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا.



❖ ملحوظة :

- تسمى هذه الذبذبات بالحرّة نظرا لعدم توفر الدارة RLC المتوالية على أي مصدر آخر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف.
- يمكن استعمال GBF مولد ذو تردد منخفض إشارته مربعة حيث يشحن خلال نصف الدور عندما يخضع لرتبة توتر صاعدة خلال نصف الدور و يفرغ يفرغ المكثف خلال الدور الموالي.

2 - أنظمة الذبذبات الحرة :

سوق أربعاء الغرب

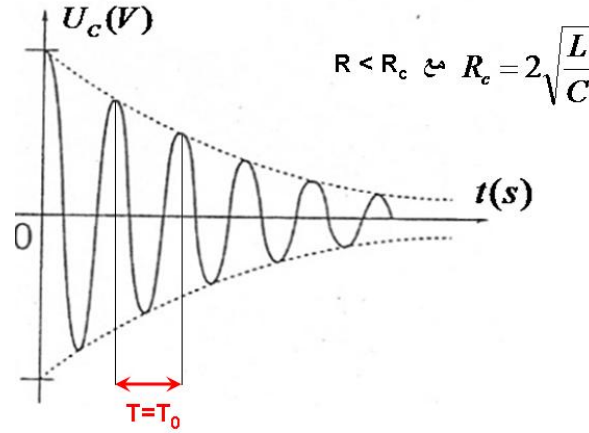
الفيزياء و الكيمياء 2 bac

الأستاذ : خالد المكاوي

حسب قيم المقاومة R نحصل على ثلاث أنظمة :

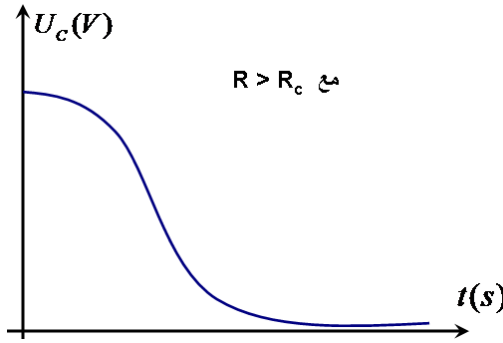
أ - نظام شبه دوري : *régime pseudopériodique*

يحدث عندما تكون قيمة R صغيرة فنحصل على ذبذبات يتناقص وسعها مع الزمن حيث شبه الدور T يساوي تقريبا الدور الخاص T_0 :



ب - نظام لا دوري : *régime apériodique*

عندما تكون R كبيرة نحصل على خمود مهم فتزول التذبذبات :

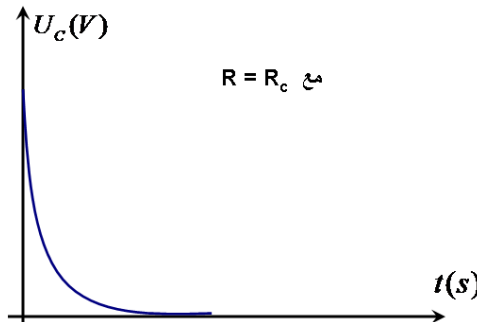


ج - نظام حرج : *régime critique*

- في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب R_c تسمى مقاومة حرجة و هي الحد الفاصل بين النظام شبه الدوري و النظام اللادوري.

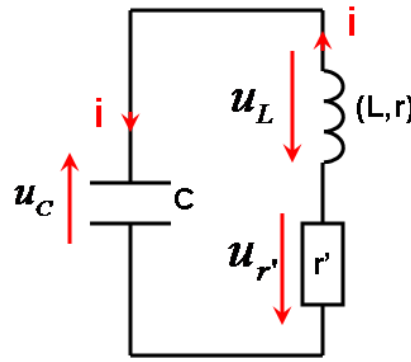
- في هذا النظام يرجع التوتر $u_C(t)$ إلى الصفر بسرعة بدون تذبذب.

- R_c تتعلق ب L و C .



3 - المعادلة التفاضلية للدارة RLC :

نعتبر الدارة RLC المتوالية :



حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_{r'} + u_L = 0$

وحسب قانون أوم : $u_{r'} = r'.i$

و لدينا : $u_L = r.i + L \frac{di}{dt}$

و لدينا : $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

نعوض : $u_C + r'.C \frac{du_C}{dt} + r.C \frac{du_C}{dt} + L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$

$$L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} + (r'+r)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف. مع $R = r' + r$

المقدار $\frac{R}{L} \frac{du_C}{dt}$ يعبر عن ظاهرة خمود الذبذبات .

II - الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC :

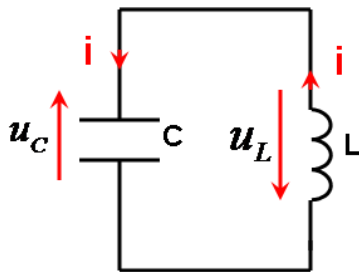
تسمى هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحققها تجريبيا نظرا لتوفر الوشيجة على مقاومة داخلية.

1 - المعادلة التفاضلية :

حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_L = 0$

مع $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$: $u_C + L \frac{di}{dt} = 0$

$$u_C + L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$



المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$: $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية يكتب على الشكل التالي :

وهو عبارة عن دالة جيبيية : $u_C(t) = U_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

سوق أربعاء الغرب

الفيزياء و الكيمياء 2 bac

الأستاذ : خالد المكاوي

$U_{\max}$: الوسع القصوي.

T_0 : الدور الخاص

$t = 0$: الطور عند أصل التواريخ

$\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$: الطور عند اللحظة t

2 - تحديد تعبير الدور الخاص :

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{اشتقاق :}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{اشتقاق :}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad \text{نعوض في المعادلة التفاضلية :}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

3 - تحديد φ و u_m :

نحدد φ و u_m بالاعتماد على شروط البدنية حيث نعبّر عن المقدارين : $u_C(t=0)$ و $i(t=0) = C \frac{du_C}{dt}$

لدينا المكثف مشحون عند $u_C(t=0) = E$: $u_C(t=0) = E \Rightarrow u_C = E$

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$u_C(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

4 - تعبير الشحنة :

$$q(t) = C.u_C(t) = C.U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$q(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

5 - تعبير شدة التيار $i(t)$:

الأستاذ : خالد المكاوي

سوق أربعاء الغرب

الفيزياء و الكيمياء 2 bac

لدينا :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} \left(U_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \right)$$

$$i(t) = -C.U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \quad \text{مع} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$i(t) = -C.E. \cdot \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

$$i(t) = -E. \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \quad \text{مع} \quad I_m = E. \sqrt{\frac{C}{L}}$$

III – انتقال الطاقة بين المكثف و الوشعة :

1 – الطاقة في الدارة LC المثالية :

$$E_e = \frac{1}{2} C u_C^2 \quad \text{الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف :}$$

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{الطاقة المغناطيسية المخزونة في الوشعة :}$$

$$E = E_e + E_m \quad \text{الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC :}$$

$$E_t = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

- عندما تنقص الطاقة الكهربائية E_e المخزونة في المكثف , تزداد الطاقة المخزونة في الوشعة و العكس بالعكس, إذن تبادل طاقي بين الوشعة و المكثف , وهذا ما يفسر انحفاظ الطاقة الكلية.

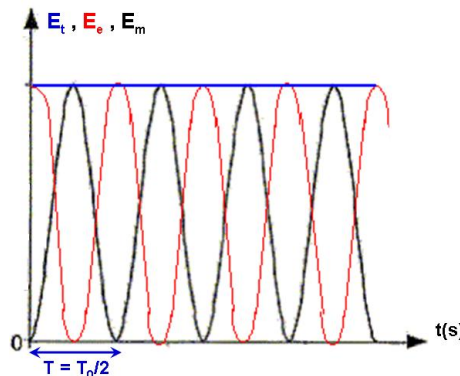
- عندما تكون $u_C = E$ تكون $i = 0$

- عندما تكون $u_C = 0$ تكون $i = i_m$

$$E_t = \frac{1}{2} C u_m^2 = \frac{1}{2} L i_m^2$$

تتحفظ الطاقة الكلية التي تخزنها الدارة LC و قيمتها ثابتة و تساوي الطاقة البدئية التي يخزنها المكثف.

❖ لتمثيل تغيرات الطاقة بدلالة الزمن نعبّر عن $E_e(t)$ و $E_m(t)$:



الأستاذ : خالد المكاوي

هام

سوق أربعاء الغرب

الفيزياء و الكيمياء 2 bac

مع $E_e = \frac{1}{2}Cu^2$ $U = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ E_e بدلالة الزمن : ✓ تعبیر

$$E_e = \frac{1}{2}C.E^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_e = E_{\max} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$E_{\max}$: الطاقة القصوى عند $t = 0$

$$E_m = \frac{1}{2}L.i^2$$

✓ تعبیر E_m بدلالة الزمن :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -C.E \frac{2\pi}{T_0} \sin \frac{2\pi}{T_0}t$$

$$i(t) = -C.E \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \frac{2\pi}{T_0}t = -E\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$i(t) = -C.E \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \frac{2\pi}{T_0}t = -E\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}L.E^2 \frac{C}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}C.E^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = E_{\max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_t = E_e + E_m = E_{\max} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + E_{\max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_t = E_{\max} \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \right)$$

$$E_t = E_{\max}$$

هام

❖ يمكن أن نثبت رياضيا أن الطاقة الكلية E_t ثابتة :

$$u_C + u_L = 0$$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات :

$$u_C + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L.i \frac{di}{dt} = 0$$

نضرب في $i = \frac{dq}{dt}$:

الأستاذ : خالد المكاوي

الفيزياء و الكيمياء 2 bac

سوق أربعاء الغرب

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 \right) = 0$$

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

و بالتالي :

2 - الطاقة في الدارة RLC :

تعبير الطاقة الكلية المخزنة في الدارة RLC :

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

خلال المدة dt تتغير الطاقة الكلية بمقدار dt :

$$\frac{dE_t}{dt} = L i \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dE_t}{dt} = i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = i \left(L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

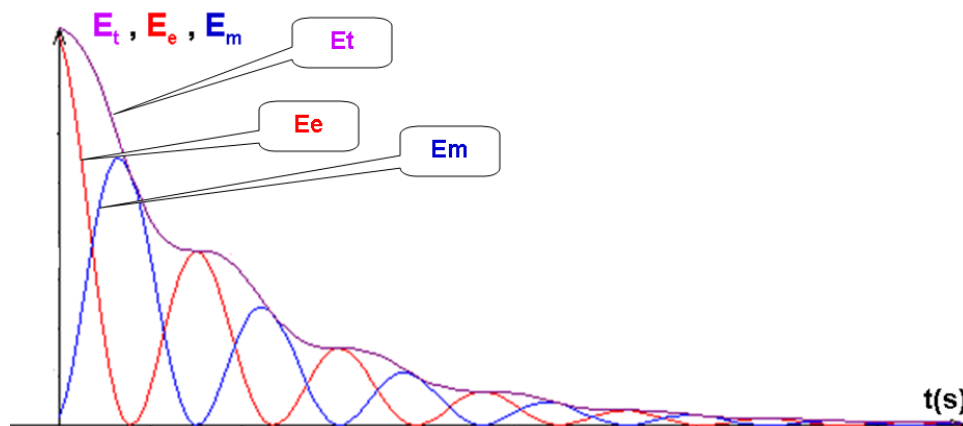
$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

و حسب المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dE_t}{dt} = -R i \frac{dq}{dt} = -R i^2$$

$$dE_t = -R i^2 dt$$

المقدار $R i^2 dt$ يمثل الطاقة الحرارية المستهلكة في الموصل الأومي و التي تتبدد بمفعول جول :



III - صيانة الذبذبات :

تُمكن صيانة الذبذبات في الدارة RLC من الحصول على نظام دوري جيبي , باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر u_s يتناسب اطرادا مع شدة التيار i (و هو يتصرف كمقاومة سالبة في اصطلاح

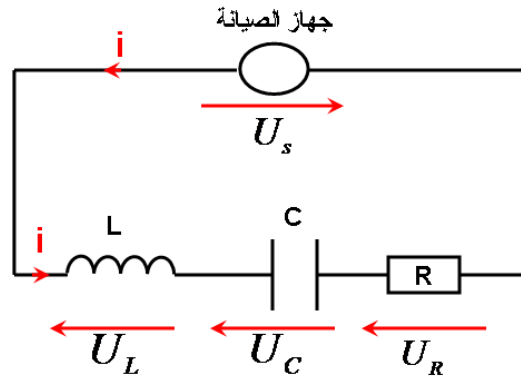
المستقبل) :

الأستاذ : خالد المكاوي

- في اصطلاح المستقبل : $u_s = -R_0.i$

- في اصطلاح المولد : $u_s = +R_0.i$

R_0 : مقاومة قابلة للضبط.



حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_R + u_C + u$

$$L \frac{di}{dt} + R.i + u_C - R_0.i = 0$$

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} - R_0 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R - R_0)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

للحصول على تذبذبات جيبية يجب أن تكتب المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$R - R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = R$$

ويتحقق إذا كان :