

الجزء الثالث :

الكهرباء

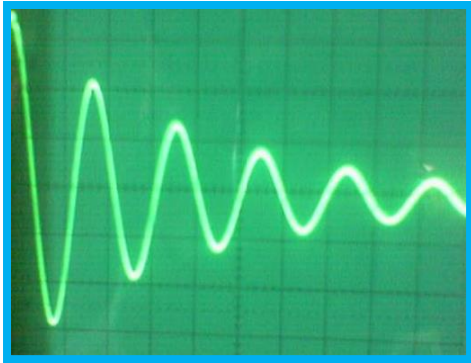
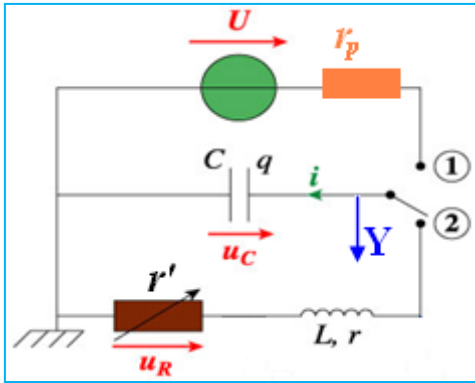
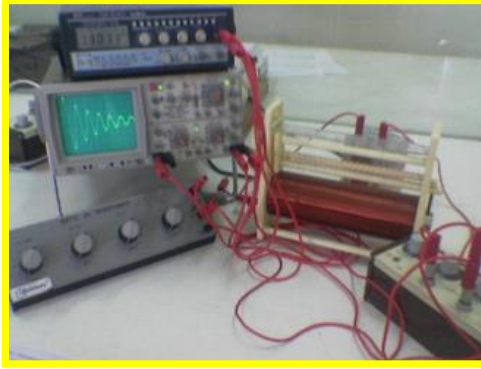
الوحدة 3

8 س

التذبذبات الحرة في دائرة RLC متوالية
Les oscillations libres dans
un circuit RLC série

بسم الله الرحمن الرحيم
والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته

الثانية باكالوريا
الفيزياء



1- تفريغ مكثف في وشيعة :

1-1- الدراسة التجريبية :

- ننجز التركيب التجريبي الممثل جانبه .
- نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 1 لمدة زمنية كافية .
- نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 فنحصل على دائرة RLC متوالية .
- نعين التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف .
- نعيد التجربة عدة مرات برفع قيمة المقاومة r' .
- أ- لماذا نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 ؟
- نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 لشحن المكثف .
- ب- ما الظاهرة التي تحدث عندما نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 ؟
- تحدث ظاهرة تفريغ المكثف في الوشيعة .
- ج- كيف يتغير وسع وإشارة التوتر $u_C(t)$ ؟ هل $u_C(t)$ دالة دورية ؟
- يتناقص وسع التوتر $u_C(t)$ مع الزمن وهو متناوب نقول إنه تذبذبي مخمد .

$u_C(t)$ ليست دالة دورية .

- د- نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$. عين مبيانيا T .

مبيانيا نجد $T = 0,3 \text{ ms}$.

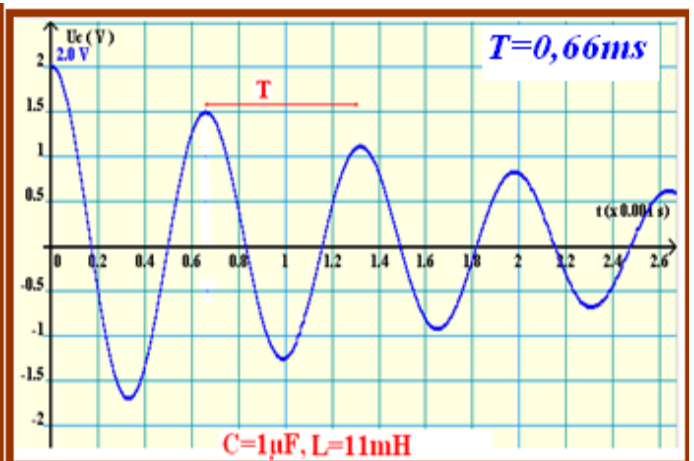
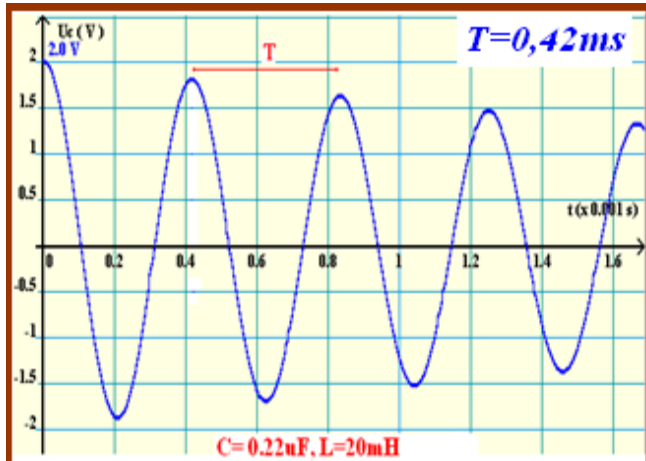
- هـ- ما تأثير المقاومة R على وسع الذبذبات وشبه الدور T ؟

تزايد المقاومة R يتناسب مع تناقص $u_C(t)$.

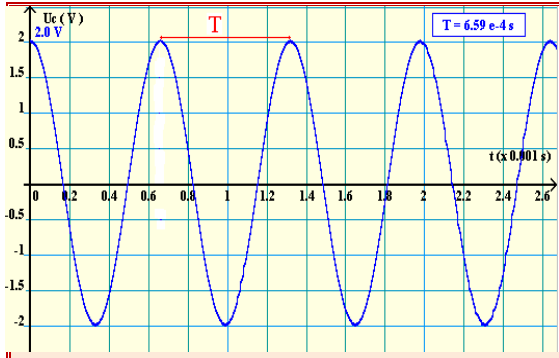
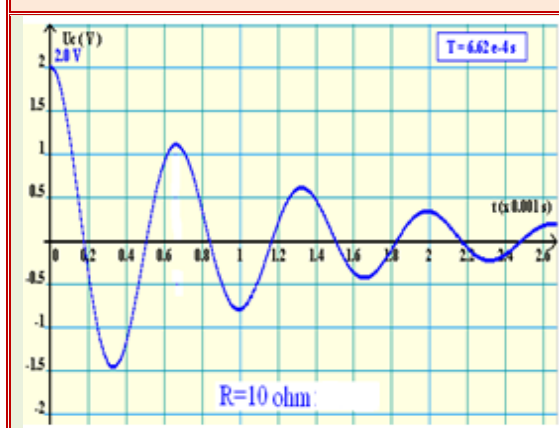
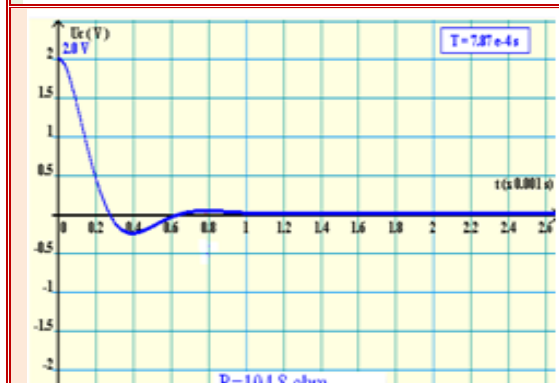
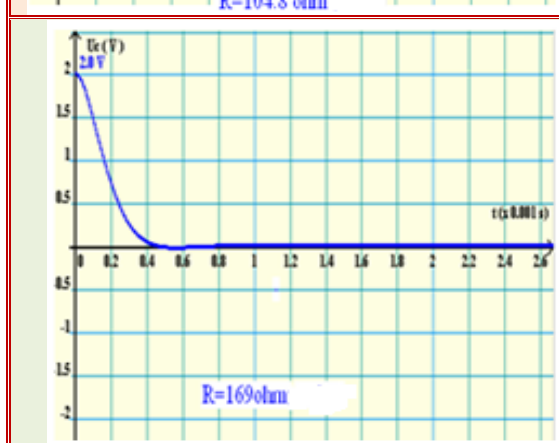
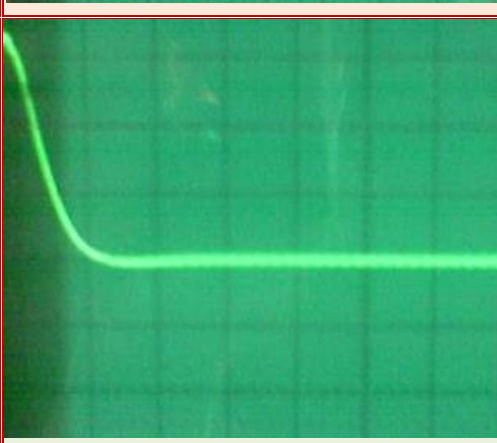
تغير المقاومة R لا يؤثر في شبه الدور T .

- و- ما تأثير معامل التحريض L وسعة المكثف C على شبه الدور T ؟

يتناسب شبه الدور T مع معامل التحريض L وسعة المكثف C .



2-1- أنظمة التذبذبات الحرة لدائرة RLC متوالية :

		$R=0$ تذبذبات حرة وغير مخمدة	نظام دوري
		R صغيرة يتناقص وسع التوتر مع $u_C(t)$ الزمن	نظام شبه دوري
		R كبيرة $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$	نظام حرج
		R كبيرة جدا تزال التذبذبات لوجود خمود مهم	نظام لا دوري

يؤدي تفريغ مكثف مشحون ، في وشيعة دائرة RLC متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة (لعدم تزويد الدارة RLC بالطاقة بعد اللحظة البدئية) و مخمدة (يتناقص وسع التوتر $u_C(t)$ مع الزمن) .
نقول إن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا .

حسب قيمة R مقاومة الدارة RLC ، نميز أنظمة التذبذبات : **نظام دوري** – **نظام شبه دوري** – **نظام حرج** – **نظام لا دوري** .
شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$.
 لا يتعلق **شبه الدور T** بالمقاومة R ، ولكن يتعلق **بمعامل التحريض L** و **سعة المكثف C** .

1-3- التفسير الطاقى :

	نظام دوري تتحفظ الطاقة الكلية للدارة لأن مقاومة الدارة منعدمة وكذلك الطاقة المبددة بمفعول جول	
	تكون الطاقة E_e المخزونة في المكثف قصوى عندما تكون الطاقة E_m المخزونة في الوشعة منعدمة والعكس . تتناقص الطاقة E_e عندما تتزايد الطاقة E_m والعكس مما يدل على أن الطاقة E_e تتحول إلى الطاقة E_m والعكس . تتناقص الطاقة الكلية E مع مرور الزمن نتيجة تبديد جزء منها بمفعول جول عند كل تبادل طاقي بين المكثف والوشعة . تغيرات الطاقة E_e و E_m شبه دورية وشبه دورها يساوي نصف شبه دور التوتر u_C .	نظام شبه دوري
	تتناقص الطاقة E_e بمفعول جول إلى أن تنعدم . تتحول الطاقة E_e إلى الطاقة E_m والعكس غير صحيح .	نظام لا دوري

1-4- المعادلة التفاضلية لدائرة RLC متوالية :

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_R + u_L + u_C = 0$

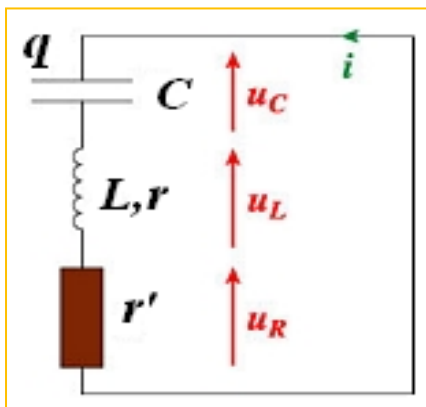
وحسب قانون أوم : $u_R = r' \cdot i$ ولدينا $u_L(t) = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$

ولدينا حسب توجيه الدارة $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

وبالتالي $u_R = r' C \cdot \frac{du_C}{dt}$ و $u_L(t) = r C \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$

إذن $r' C \cdot \frac{du_C}{dt} + r C \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$

نضع $R = r + r'$ إذن $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

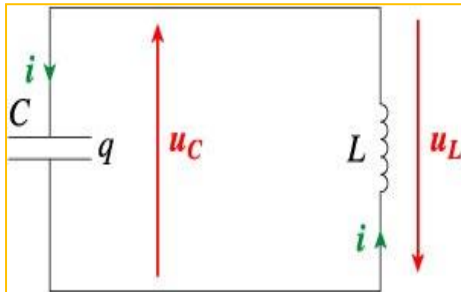


المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

يعبر المقدار $\frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt}$ عن ظاهرة خمود الذبذبات .

نعلم أن $u_C = \frac{q}{C}$ إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q هي : $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$



2- الدراسة التحليلية لدارة مثالية LC :

1-2- المعادلة التفاضلية :

نصل مربطي مكثف سعته C مشحون بدنيا ، بوشية معامل تحريضها الذاتي L ومقاومتها الداخلية مهملة .

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_C = 0$

ولدينا حسب توجيه الدارة $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

ولدينا $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$ وبالتالي $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

المعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

نعلم أن $u_C = \frac{q}{C}$ إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q هي : $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$

2-2- حل المعادلة التفاضلية :

يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

U_m وسع الذبذبات (الوسع القصوي للتوتر u_C) ووحدته V

T_0 الدور الخاص للذبذبات مع $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ النبض الخاص

مع $N_0 = \frac{1}{T_0}$ التردد الخاص .

$\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi$ الطور عند اللحظة t .

φ الطور البدني ($t = 0$) ويعبر عنها بالراديان (rad) ونختار $-\pi \leq \varphi < \pi$.

يتم تحديد قيم U_m و φ من خلال الشروط البدنية (لأن التوتر u_C و التيار المار في الوشية متصلين) .

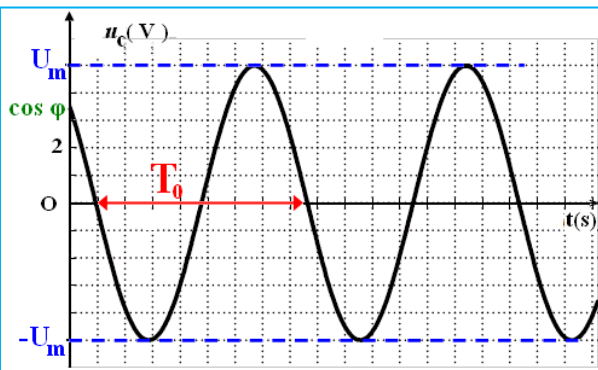
لدينا $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ أي $i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} C \cdot U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

ونعلم أن $i(0) = -\frac{2\pi}{T_0} C U_m \sin(\varphi) = 0$ أي $\sin(\varphi) = 0$

ومنه : $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$.

المكثف مشحون بدنيا $u_C(0) = U_m \cos(\varphi) = E$ أي $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$ إذن $\varphi = 0$.

لدينا $U_m \cos(\varphi) = U_m \cos(0) = E$ إذن $U_m = E$. وبالتالي : $u_C(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$



$$[\cos(ax + b)]' = -a \cdot \sin(ax + b)$$

$$[\sin(ax + b)]' = a \cdot \cos(ax + b)$$

2-3- الدور الخاص للتذبذبات :

لدينا $u_C(t) = U_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ أي $\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}U_m \sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

ومنه فإن $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -(\frac{2\pi}{T_0})^2 U_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ يعني $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -(\frac{2\pi}{T_0})^2 u_C(t)$

نعوض في المعادلة التفاضلية : $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$ أي $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$ إذا كان t

تتحقق المعادلة كيفما كانت t إذا كان $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$ أي $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

ملحوظة :

لدينا $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ مع $C = \frac{i}{\frac{du_C}{dt}}$ و $L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$

أي $[C] = \frac{[i]}{[u]}$ و $[L] = \frac{[u]}{[i]}$ إذن $[T_0] = [\sqrt{L.C}]$

$[T_0] = [t]$ أي $[T_0] = \sqrt{\frac{[u]}{[i]} \frac{[i]}{[u]}} = \sqrt{[t^2]} = [t]$

إذن الدور الخاص T_0 له بعد الزمن ونعبر عنه بالثانية .

شبه الدور T للتذبذبات في دائرة RLC متوالية مخدمة قليلا يساوي تقريبا **الدور الخاص T_0** للمتذبذب غير المخمد .

$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

2-4- تعبير الشحنة q وشدة التيار i :

لدينا $q = C.u_C$ إذن $q(t) = Q_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

مع $Q_m = CU_m$

ولدينا $i = \frac{dq}{dt}$ إذن $i(t) = I_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

مع $I_m = \frac{2\pi}{T_0}Q_m$

الدالتان $u_C(t)$ و $i(t)$ جيبيتان وهما على تربع في الطور أي عندما تكون إحداها منعقدة تكون الأخرى قصوى أو دنيا .

3- انتقالات الطاقة بين المكثف و الوشعة :

3-1- الطاقة في الدارة LC المثالية :

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC في كل لحظة هي

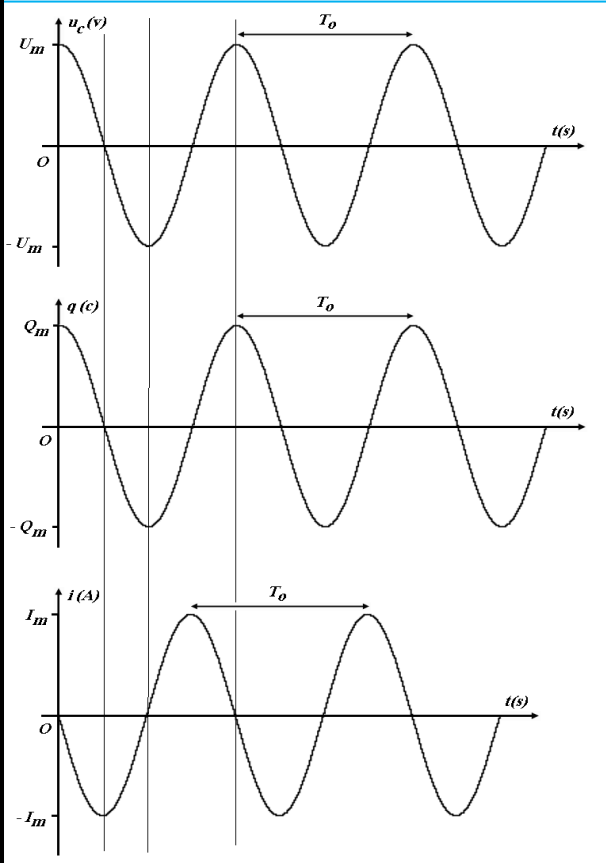
$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_C = 0$

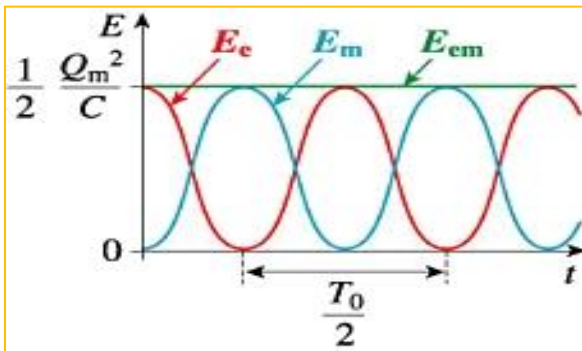
أي $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ نضرب المتساوية في $\frac{dq}{dt}$

فنجد $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = 0$ أي $\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0$

وبالتالي $E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cte$

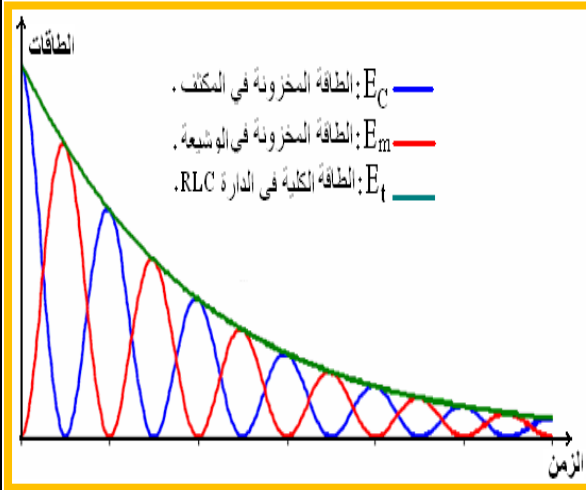


$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
 $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$



⊕ تكون الطاقة الكلية لدائرة مثالية LC ثابتة وتساوي الطاقة البدنية المخزونة في المكثف .
⊕ خلال التذبذبات غير المخمدة ، تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في

$$E_t = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 . \text{ الوشيعية و العكس .}$$



2-3- الطاقة في الدائرة RLC المتوالية :

الطاقة الكلية المخزونة في الدائرة RLC في كل لحظة هي

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L i \frac{di}{dt} = i \left(\frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} \right)$$

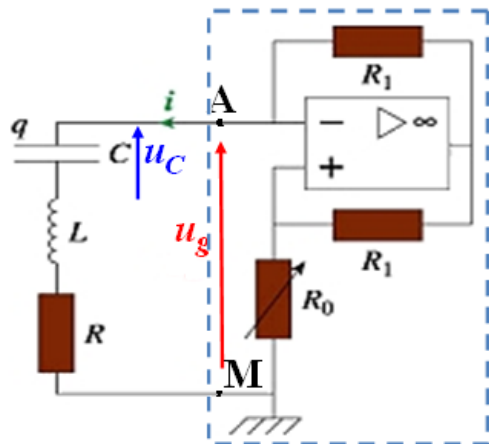
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$
 وباعتبار المعادلة التفاضلية

$$\text{فإن } \frac{dE_t}{dt} = -R i^2 \text{ أي } L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = -R \frac{dq}{dt} = -R i$$
 وهكذا يتضح أن :

$$\frac{dE_t}{dt} < 0$$
 الطاقة الكلية E_t تتناقص لأن

التناقص الطاقى يعزى لوجود المقاومة R .

تتناقص الطاقة الكلية لدائرة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .



4- صيانة التذبذبات :

يمكن صيانة تذبذبات دائرة RLC متوالية والحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت ، باستعمال جهاز يزود الدائرة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدائرة بمفعول جول .

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدائرة بتوتر u_g يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$. $u_g = R_0 \cdot i$ وهو يتصرف كمقاومة سالبة .

وهكذا تكون المقاومة الكلية للدائرة منعدمة عندما نختار $R_0 = R$.

نعتبر التركيب التجريبي التالي حيث المولد G يمثل جهاز الصيانة .

القدرة المبددة بمفعول جول في الدائرة RLC هي $P_{th} = R \cdot i^2$.

القدرة التي يمنحها المولد G هي $P_g = u_g \cdot i$.

ليعوض المولد القدرة المبددة بمفعول جول يجب أن يكون

$$P_{th} = P_g \text{ وبالتالي } u_g = R \cdot i$$

$$u_R + u_L + u_C = u_g$$
 نطبق قانون إضافية التوترات فنجد

$$R \cdot i + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = R \cdot i$$
 أي

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$
 إذن

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية لدائرة LC مثالية أي أن التذبذبات جيبية ذات وسع ثابت دورها

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$$