المديرية الإقليمية للتربية و التكوين
تارودانت
الثانوية التأهيلية محمد السادس – تالوين

الموسم الدراسي : 2015/2016

المستوى : الثانية باكلوريا علوم رياضية أ

الأستاذ : معـاذ أكرام

سلسلة تمارين درس الفضاءات المتجهية الحقيقية

التمرين 1

1. ادرس في $\mathbb{R}^3$ استقلال الأسر التالية :

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(2,1,-1),(0,1,-2)\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,0)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(3,-1,1),(-1,0,2),(1,0,-2)\} \qquad \mathcal{B}_4 = \{(1,1,1),(2,-1,1),(1,0,1)\}$$

التمرين 2

1. حدد من بين الأسر التالية التي تكون اساس للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(3,0,-1),(-1,1,-1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,0)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(1,2,1),(3,0,-1),(1,8,1)\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(1,2,-3),(1,0,-1),(1,1,0)\}$$

التمرين 3

في الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ نعتبرالمجموعات :

$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x - 2y + z = 0\right\} \qquad E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x + y - 4z = 0\right\}$$

$$E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x - 2y = 0 et z - x = 0\right\} \qquad E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad xy - z = 0\right\}$$

$$E_6 = \left\{(\alpha,\beta,2\alpha) / \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} \qquad E_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x + y - 4z = 0\right\}$$

1. حدد من بين المجموعات اعلاه التي تمثل فضاءات متجهية جزئية للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$

التمرين 4

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي : $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x - y + 3z = 0\right\}$

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. نعتبر في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,.)$ المتجهتين : $\overrightarrow{e_1} = (0,3,1)$ و $\overrightarrow{e_2} = (1,1,0)$.
   1.2 بين أن الأسرة $\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.
   2.2 بين أن الأسرة $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ حرة في الفضاء $(E,+,.)$.

3 استنتج $\dim E$

التمرين 5

نعتبر المجموعة $D - \{1\}$ و E مجموعة الدوال العددية f المعرفة على D بما يلي : $f(x) = \dfrac{P(x)}{x^3 - 1}$. حيث $P(x)$ حدودية درجتها أصغر أو يساوي 2.

1. بين أن $(E, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. نعتبر الدوال $g_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ و $g_2(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ و $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

1.2. بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$.

2.2. حدد إحداثيات الدالة $h(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

التمرين 6

لتكن P_4 مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو يساوي 4 بحيث : $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, .)$.

1. بين أن الأسرة $\mathcal{T} = \{(1+x)^4, x(1+x)^3, x^2(1+x)^2, x^3(1+x), x^4\}$ اساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, .)$.
2. حدد إحداثيات الحدودية $P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ في الأساس $\mathcal{T}$.

التمرين 7

نعرف في المجموعة $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $+$ بما يلي : $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$; $(\forall (x, y), (x', y') \in E)$
وقانون التركيب الداخلي معاملاته في $\mathbb{R}$ بمايلي : $\alpha(x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$: $(\forall \alpha \in \mathbb{R}); (\forall (x, y) \in E)$.

1. نعتبر التطبيق :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & (e^x, y) \end{array}$$
نذكر $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي .

1.1 بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^2, +)$ نحو $(E, +)$.

1.2 استنتج أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

1.3 حدد العنصر المحايد في $(E, +)$، وما هو مماثل (x, y) في $(E, +)$.

2 بين أن $(E, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي.

التمرين 8

نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ f : x \mapsto (ax + b)e^{2x} / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. بين أن $(E, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. لتكن f_1 و f_2 الدالتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_1(x) = xe^{2x}$ و $f_2(x) = e^{2x}$.

2.1 بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ أساس للفضاء المتجهي E.

2.2 بين أن الدالة $g(x) = \displaystyle\int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$ تنتمي الى المجموعة E، محددا زوج احداثياتها بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.