

إستدراكية 2008

نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي * المعرفة بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x + y - 3xy$$

$$(1) \quad \text{أ. تحقق أن } (1-3x)(1-3y) = 1-3(x * y)$$

ب. بين أن $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$ زمرة تبادلية

$$(2) \quad \text{أ. نعتبر التطبيق } \varphi : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \rightarrow \varphi(x) = 1 - 3x$$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*, \times)$

$$\text{ب. بين أن } \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*) = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$$

ج. بين أن $\left(\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[, *\right)$ زمرة جزئية من $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$

(3) ليكن x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عدد طبيعي من $\mathbb{N}$.

$$\text{نضع : } x^{(0)} = 0 \text{ و } x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

أ. بين أن :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad \varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$$

ب. استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n

(4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي T المعرفة

$$\text{بما يلي : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x Ty = x + y - \frac{1}{3}$$

أ. بين أن $(\mathbb{R}, T)$ زمرة تبادلية

ب. بين أن $(\mathbb{R}, *, T)$ جسم غير تبادلي

2009 العادية

$M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ أن } (M_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ حلقة واحدة وحدتها}$$

. ونعتبر المجموعة F للمصفوفات والتي تكتب على

$$\text{الشكل } M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \text{ مع } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

(1) أ. بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب. بين أن $(F, \times)$ زمرة غير تبادلية

(2) لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من F حيث

أن $x \in \mathbb{R}^*$. بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F, \times)$

(3) نضع $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

نزود E بقانون تركيب داخلي $\perp$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall ((x, y), (a, b)) \in E^2) \quad (x, y) \perp (a, b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right)$$

ونعتبر التطبيق :

$$M(x, y) \rightarrow (x, y)$$

أ. أحسب $(1, 1) \perp (2, 3)$ و $(1, 1) \perp (2, 3)$

ب. بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي

ج. استنتج بنية $(E, \perp)$

إستدراكية 2009

$M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

و $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة

ولتكن V مجموعة المصفوفات والتي تكتب على

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \text{ حيث } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(1) بين أن $(V, +, \cdot)$ فضاء حقيقي محدد بعده

(2) أ. بين أن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب. بنية $(V, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية

$$(3) \quad \text{أ. أحسب } M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

ب. هل $(V, +, \times)$ جسم ؟

(4) لتكن X مصفوفة من V حيث :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \text{ مع } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

أ. بين أن $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$ حيث O هي

المصفوفة المنعدمة

ب. نفترض أن $a^2 - 4b^2 \neq 0$ بين أن المصفوفة X تقبل

مقلوبا في V ينبغي تحديده

تمارين

لتكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المحايد e ونرمز بـ a^{-1}

لمائل a في $(G, *)$ وليكن f_a التطبيق المعرفة من G

نحو G بما يلي : $(\forall x \in G) \quad f_a(x) = a * x * a^{-1}$

(1) بين أن f_a تشاكل من $(G, *)$ نحو $(G, *)$

(2) لتكن F مجموعة التطبيقات f_a ; $a \in G$.

بين أن $(F, \circ)$ زمرة