I. الزمرة *Le groupe*

A. الزمرة :

1. تعريف :

زمرة هي مجموعة G غير فارغة مزودة بقانون تركيب داخلي $\perp$ و تحقق ما يلي :

- القانون $\perp$ **تجمعي** .
- القانون $\perp$ **له عنصر محايد** e .
- **كل عنصر من** G **له مماثل** .

إذا **تحققت التبادلية** الزمرة تسمى زمرة تبادلية . *est un groupe commutatif (ou abélien)* $(G,\perp)$.

إذا كانت المجموعة G **منتهية** الزمرة تسمى **زمرة منتهية و رئيسي** G **يسمى رتبة (** *cardA* **)** G و إذا كان العكس الزمرة تسمى زمرة غير منتهية .

2. أمثلة :

- **المجموعات :** $\mathbb{Z}\,;\,\mathbb{Q}\,;\,\mathbb{R}\,;\,\mathbb{C}$ **مزودة بالجمع هي زمر تبادلية غير منتهية**
- $(\mathbb{N},+)$ ليست بزمرة لأن 5 مماثله هو -5 و $-5\notin\mathbb{N}$.
- المجموعات $\mathbb{Q}^*\,;\,\mathbb{R}^*\,;\,\mathbb{C}^*$ مزودة بالضرب **هي زمر تبادلية** .
- $(\mathbb{Z}^*,\times)$ ليست بزمرة لأن كل عدد من $\mathbb{Z}^*\setminus\{-1,1\}$ ليس له مماثل بالنسبة للضرب .
- $(\mathscr{P}(E),\cup)$ (مع $E\neq\varnothing$ و $\cup$ هي الاتحاد) $\cup$ تبادلي و تجمعي و الجزء الفارغ $\varnothing$ هو العنصر المحايد ولكن $\varnothing$ هو العنصر الوحيد الذي يتوفر على مماثل إذن $(\mathscr{P}(E),\cup)$ليست بزمرة.
- $(\mathscr{P}(E),\cap)$ (مع $E\neq\varnothing$ و $\cap$ هو التقاطع) $\cap$ تبادلي و تجمعي و الجزء المملوء هو العنصر المحايد ولكن E هو العنصر الوحيد الذي يتوفر على مماثل إذن $(\mathscr{P}(E),\cup)$ليست بزمرة.
- $(\mathscr{P}(E),\Delta)$ (مع $E\neq\varnothing$ و Δ هي الفرق التماثلي أي $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$) هي زمرة تبادلية .
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية نفس الشيء ل $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$. ولكن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ ليس بزمرة وكذلك $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.
- $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+\right)$ زمرة تبادلية .

3. خاصيات : (حسب الدرس الخاص بالقوانين التركيب الداخلية)

إذا كانت $(G,\perp)$ زمرة .

- العنصر المحايد موجود ووحيد في $(G,\perp)$.
- كل عنصر $a\in G$ له مماثل و حيد a' في $(G,\perp)$.
- كل عنصر $a\in G$ هو منتظم في $(G,\perp)$.
- a و b مماثليهما هما على a' و b' التوالي في $(G,\perp)$ لدينا مماثل $a\perp b$ في $(G,\perp)$ هو $(a\perp b)'=b'\perp a'$.

4. برهان :

✓ نبين على صحة الخاصية : كل عنصر a من G هو منتظم في $(G,\perp)$.

ليكن a و b و c من G .

- حيث $(1): a\perp b = a\perp c$
إذن: $\underset{e}{a'\perp a}\perp b = \underset{e}{a'\perp a}\perp c$ (التركيب ب a' على اليسار في العلاقة (1)).
ومنه : $b=c$.
- حيث $(1): b\perp a = c\perp a$
إذن: $b\perp \underset{e}{a\perp a'} = c\perp \underset{e}{a\perp a'}$ (التركيب ب a' على اليمين في العلاقة (1)).
ومنه : $b=c$.

خلاصة : العنصر a من G منتظم بالنسبة للقانون $\perp$.

5. ملحوظة :
- المعادلة $a\perp x = b \; : x\in G$ تقبل حلا وحيد في G هو $x = a'\perp b$ أما المعادلة $x\perp a = b \; : x\in G$ الحل هو $x = b\perp a'$.
- إذا كانت الزمرة $(G,\perp)$ تبادلية المعادلتين السابقتين تمثلان نفس المعادلة و الحلين متساويين .
- حالة $(G,\perp)$ زمرة منتهية . كل عنصر x من G يظهر مرة واحدة بالضبط في كل سطر وفي كل عمود من جدول قانون $(G,\perp)$

B. تشاكل زمرة : *L'homomorphisme du groupe*

1. خاصية :

> f تشاكل من $(E,\perp)$ نحو $(F,*)$ (أي $f:(E,\perp)\to(F,*)$)
> إذا كانت $(E,\perp)$ زمرة (تبادلية) فإن $(f(E),*)$ زمرة (تبادلية)

II. الزمرة الجزئية : *Le sous groupe*

A. زمرة جزئية :

1. تعريف :

> لتكن $(G,\perp)$ زمرة .
> نقول إن جزء H من G هو زمرة جزئية ل G إذا كان :
> - $H\neq\varnothing$.
> - H جزء مستقر من $(G,\perp)$. (أي $\forall(a,b)\in H^2 \; : a\perp b\in H$)
> - H زمرة بالنسبة للقانون التركيب الداخلي المستخلص $\perp$ ل G.

2. ملحوظة :
- H تحتوي على الأقل على العنصر المحايد e للقانون $\perp$.
- $\{e\}$ هي زمرة جزئية ل G . G هي زمرة جزئية ل G .
- كل زمرة جزئية تخالف $\{e\}$ و G تسمى زكرة جزئية فعلية ل G .

3. أمثلة :
- مثال 1 : $(\mathbb{Q},+)$ زمرة تبادلية لدينا كذلك $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية إذن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية تبادلية ل $(\mathbb{Q},+)$.
و كذلك الجزء $3\mathbb{Z}=\{3k/k\in\mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية تبادلية ل $(\mathbb{Z},+)$.

- **مثال 2 :** $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية أما $U=\{z\in\mathbb{C}^* / |z|=1\}$ (الدائرة المثلثية) هي زمرة جزئية تبادلية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

أما الجزء $\Gamma_n=\{z\in\mathbb{C}^* / z^n=1\}$ المتكونة من الجذور من الرتبة n للوحدة فهو زمرة جزئية ل U .

B. خاصيات الزمرة الجزئية :

1. خاصية :

$(H,\perp)$ زمرة جزئية لزمرة $(G,\perp)$ حيث e هو العنصر المحايد ل $\perp$ بالنسبة ل G . a و a' متماثلين ل $\perp$ في G .

- العنصر المحايد ل $(H,\perp)$ هو بالضبط e .
- إذا كان $a\in H$ فإن مماثل a هو a' و $a'\in H$.
- ليكن a و b من H و b' مماثل b في G لدينا : $a\perp b'\in H$.

2. برهان :

- نبرهن على صحة : العنصر المحايد ل $(H,\perp)$ هو بالضبط e .

بما أن : $(H,\perp)$ زمرة جزئية إذن H زمرة بالنسبة للقانون التركيب الداخلي المستخلص $\perp$ ل G. ومنه H له العنصر المحايد ليكن هو e' . ومنه $e'\perp e'=e'$ (1)

ومنه : $e\perp e'=e'$ (لأن e' العنصر المحايد ل $\perp$ في G) (2) .

حسب (1) و (2) نحصل على $e\perp e'=e'\perp e'$

إذن : $e=e'$ (لأن جميع العناصر منتظم ومن بينها $e'\in G$ لأن H جزء من G) .

خلاصة : العنصر المحايد ل $(H,\perp)$ هو بالضبط e .

- نبرهن على صحة : إذا كان $a\in H$ فإن مماثل a هو a' و $a'\in H$.

نضع : مماثل a هو a' في $(G,\perp)$. مماثل a هو a'' في $(H,\perp)$.

نبين أن : $a''=a'$.

لدينا : مماثل a هو a' في $(G,\perp)$ إذن : $a\perp a'=e$ (3) .

مماثل a هو a'' في $(H,\perp)$ إذن : $a\perp a''=e$ (4) .

حسب : (3) و (4) نحصل على $a\perp a'=a\perp a''$ إذن $a''=a'$ (لأن جميع العناصر منتظم في زمرة)

خلاصة : إذا كان $a\in H$ فإن مماثل a هو a' و $a'\in H$.

- نبرهن على صحة : ليكن a و b من H و b' مماثل b في G لدينا : $a\perp b'\in H$.

ليكن b من H إذن مماثله b' من H حسب البرهان السابق .

بما أن H جزء مستقر من $(G,\perp)$ إذن $a\perp b'\in H$ (لأن b من H و b' من H) .

خلاصة : $a\perp b'\in H$.

3. خاصية مميزة 1 :

$(H,\perp)$ زمرة جزئية لزمرة $(G,\perp)$ إ ذا وفقط إذا كان :

- $H\neq\varnothing$
- $(a\in H$ و $b\in H)\Rightarrow a\perp b\in H$.
- $a\in H\Rightarrow a'\in H$ (مع a' مماثل a ل $\perp$ في G) .

4. برهان :

$\Rightarrow$ الاستلزام المباشر صحيح لأن $(H,\perp)$ زمرة جزئية و حسب الخاصية السابقة .

$\Leftarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي .

بما أن : $(a\in H$ و $b\in H)\Rightarrow a\perp b\in H$ إذن H جزء مستقر في $(G,\perp)$. إذن $\perp$ تجمعي في H (لأنه تجمعي في G) .

من جهة أخرى $H\neq\varnothing$ يحتوي على الأقل على عنصر ليكن a من H إذن مماثله a' من H (حسب $a\in H\Rightarrow a'\in H$) .

وبما أن H جزء مستقر في $(G,\perp)$ إذن $a\perp a'\in H$ أي $e\in H$.

إذن : $\perp$ تجمعي في H و H يحتوي على العنصر المحايد و كل عنصر a من H مماثله a' من H و بالتالي $(H,\perp)$ زمرة .

ومنه : $(H,\perp)$ زمرة جزئية لزمرة $(G,\perp)$

إذن الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة صحيحة .

5. خاصية مميزة 2 :

> $(H,\perp)$ زمرة جزئية لزمرة $(G,\perp)$ إ ذا وفقط إذا كان :
> - $H\neq\varnothing$.
> - $(a\in H$ و $b\in H)\Rightarrow a\perp b'\in H$ (مع b' مماثل b ل $\perp$ في G) .

6. برهان :

$\Rightarrow$ الاستلزام المباشر صحيح لأن $(H,\perp)$ زمرة جزئية و حسب الخاصية السابقة لكل a من H كذلك a' من H ومنه $a\perp b'\in H$

$\Leftarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي .

لدينا : $(a\in H$ و $b\in H)\Rightarrow a\perp b'\in H$ نأخذ $a=b$ ومنه $a\perp a'=e\in H$ إذن العنصر المحايد e من H .

نأخذ هذه المرة $a=e$ إذن $e\perp a'=a'\in H$ و منه a' مماثل a ينتمي ل H .إذن الشرط الأول للخاصية المميزة رقم 1 يتحقق

من جهة أخرى H جزء مستقر في $(G,\perp)$ إذن لكل a و c من H فإن $ac\in H$ نأخذ $c=b'$ إذن $a\perp b'\in H$.

إذن الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة 2 صحيحة .

7. أمثلة :

$(G,\oplus)$ زمرة . $(G_1,\oplus)$ و $(G_2,\oplus)$ زمرتين جزئيتين ل $(G,\oplus)$.نعتبر $H=G_1\cap G_2$. مع e العنصر المحايد ل $(G,\oplus)$.

بين أن H زمرة جزئية ل G .

- لدينا : e ينتمي لكل من $(G_1,\oplus)$ و $(G_2,\oplus)$ لأنهما زمرتين جزئيتين و بالتالي $e\in H=G_1\cap G_2$ إذن $H\neq\varnothing$.

ومنه : $H\neq\varnothing$

- ليكن x و y من H إذن x و y عنصران من G_1 و G_2 إذن y' مماثل y عنصر من G_1 و G_2 إذن $xy'\in G_1$ و كذلك $xy'\in G_2$ (لأنهما زمرتين جزئيتين) و بالتالي $xy'\in G_2\cap G_2=H$

ومنه : $xy'\in H$.

خلاصة : H زمرة جزئية ل G .

☺ **ملحوظة : إذن أثبتنا : تقاطع زمرتين جزئيتين هي زمرة جزئية .**

III. الحلقة : *L'anneau*

A. التوزيعية : *La distributivité*

فيما تبقى من الدرس E مجموعة مزودة بقانونين تركيبين داخليين $\perp$ ثم $*$. و نكتب باختصار $(E,\perp,*)$.

1. تعريف :

- نقول إن القانون $*$ توزيعي من اليسار على القانون $\perp$ إذا كان : $\forall(a,b,c)\in E^3 : a*(b\perp c)=(a*b)\perp(a*c)$.
- نقول إن القانون $*$ توزيعي من اليمين على القانون $\perp$ إذا كان : $\forall(a,b,c)\in E^3 : (b\perp c)*a=(b*a)\perp(c*a)$.
- إذا تحقق التوزيعية من اليمين و كذلك من اليسار نقول باختصار لقانون $*$ توزيعي على القانون $\perp$.

2. ملحوظة :

إذا كان القانون $*$ تبادلي (وليس بالضرورة أن يكون القانون $\perp$ تبادلي) التوزيعية من جهة واحدة تكفي لتحقق التوزيعية .

3. أمثلة :

- الضرب توزيعي على الجمع في المجموعات التالية : $\mathbb{C} ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}$.
- $\cap$ التقاطع توزيعي على $\cup$ الاتحاد في $\mathcal{P}(E)$ و كذلك $\cup$ التقاطع توزيعي على $\cap$ الاتحاد في $\mathcal{P}(E)$.
- الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- الضرب توزيعي على الجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و كذلك في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B. بنية حلقة : *structure d'anneau*

1. تعريف :

$(E,\perp,*)$ مجموعة مزودة بقانونين تركيبين داخليين $\perp$ و $*$.

نقول إن $(E,\perp,*)$ حلقة إذا كان:

- القانون الأول $\perp$ له بنية زمرة تبادلية في E . (أي $(E,\perp)$ زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني $*$ تجميعي في E .
- القانون الثاني $*$ توزيعي على القانون الأول $\perp$ في E .

2. ملحوظة :

- إذا تحققت تبادلية القانون الثاني $*$ الحلقة $(E,\perp,*)$ تسمى حلقة تبادلية *(ou abélien) est un anneau commutatif* $(E,\perp,*)$
- إذا كان القانون الثاني $*$ يتوفر على العنصر المحايد (نرمز له في الغالب ب u) نقول أن الحلقة واحدية و وحدتها u) (*est un anneau unitaire (ou unifère)* $(E,\perp,*)$)
- إذا كانت المجموعة E منتهية الزمرة تسمى حلقة منتهية و إذا كان العكس الحلقة تسمى زمرة غير منتهية .

3. أمثلة :

- $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية حيث $u=1$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في $\mathbb{Z}$.
- $(2\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية وليست بواحدية لأن $u=1\notin 2\mathbb{Z}$.
- $(\{0\},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية حيث وحدتها هي $u=0$ العنصر المحايد للقانون الثاني يساوي العنصر المحايد للقانون الأول .
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية حيث وحدتها هي $u=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ العنصر المحايد للقانون الثاني الضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية حيث وحدتها هي $u=I_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ العنصر المحايد للقانون الثاني الضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

C. قواعد الحساب في الحلقة : *Règle de calcul dans un anneau*

1. ملحوظة : جميع قواعد الحساب في الحلقة التبادلية الواحدية $(\mathbb{Z},+,\times)$ تبقى صالحة في أي حلقة تبادلية واحدية $(E,\perp,*)$ التي تنتج من تعريف الحلقة مثل نضع $a^0 = u$ كما هو في $\mathbb{Z}$ $a^0 = 1$ وكذلك $a^n = \underbrace{a*a*a*\cdots*a}_{n}$ (n من العوامل) .

2. تمرين تطبيقي :

نعرف في $\mathbb{Z}^2$ قانونين تركيبيين داخليين هما $+$ و $\times$ معرفين كما يلي :

- $3\ \forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$
- $\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)\mp(a',b')=(aa',bb')$.

بين أن : $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حلقة واحدية مع العنصر المحايد ل $+$ هو $(0,0)$ ول $\times$ هو $(1,1)$.

3. عنصر الماص *élément absorbant*

❖ خاصية و تعريف :

لتكن $(E,\perp,*)$ حلقة و e العنصر المحايد للقانون الأول $\perp$ في E .

- $\forall a\in E\ \ : a*e=e*a=e$.

وفي هذه الحالة العنصر المحايد للقانون الأول e يسمى عنصر ماص للقانون الثاني $*$ في E

❖ برهان :

ليكن a و b من E .

لدينا : $b\perp e=b$ ومنه $a*(b\perp e)=a*b$ (نركب بالقانون $*$)

إذن : $(a*b)\perp(a*e)=a*b$ (لأن $*$ توزيعي على $\perp$)

إذن : $(a*b)\perp(a*e)=(a*b)\perp e$ (لأن $a*b=(a*b)\perp e$) .

إذن : $(a*e)=e$ (لأن $a*b$ عنصر منتظم) .

ومنه : $a*e=e$.

بالنفس الطريقة نبين أن : $e*a=e$.

خلاصة : $\forall a\in E\ : a*e=e*a=e$

4. خاصية المماثل بالنسبة للقانون 2 $*$:

❖ خاصية و تعريف :

لتكن $(E,\perp,*)$ حلقة . e العنصر المحايد للقانون الأول $\perp$ في E . a' و b' مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الأول $\perp$ في E

- $\forall a,b\in E\ : a*b'=a'*b=(a*b)'$.
- $\forall a,b\in E\ : a*b=(a*b)'$.

❖ برهان :

ليكن a و b من E حيث a' و b' مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الأول .

- نبين أن : $(a*b)'=a*b'$

لدينا : $b\perp b'=e$.

إذن : $a*(b\perp b')=a*e$.

إذن : $(a*b)\perp(a*b')=a*e$ (لأن $*$ توزيعي على $\perp$) .

إذن : $(a*b)\perp(a*b')=e$ (لأن e عنصر ماص للقانون الثاني $*$ في E حسب ما سبق) .

ومنه : مماثل $a*b$ بالنسبة للقانون $\perp$ هو $a*b'$. أي $(a*b)'=a*b'$.

خلاصة : $(a*b)'=a*b'$

- نبين أن : $a'*b=(a*b)'$

لدينا : $(a*b)\perp(a'*b)=(a*a')\perp b$
$=e*b$
$=e$ (لأن e عنصر ماص للقانون الثاني * في E حسب ما سبق) .

ومنه : مماثل $a*b$ بالنسبة للقانون $\perp$ هو $a'*b$. أي $(a*b)'=a'*b$.

خلاصة : $(a*b)'=a'*b$

- نبين أن : $a*b=(a*b)'$

لدينا : $(a)'*(b)'=\left[\left((a)'*(b)'\right)'\right]'=\left[\left((a)'\right)'*b'\right]'=\left[a*b'\right]'=a*(b')'=a*b$

ومنه : $(a)'*(b)'=a*b$.

خلاصة : $a*b=(a*b)'$.

D. العناصر القابلة للمماثلة ثم العناصر المنتظمة في حلقة واحدية :

éléments inversibles - éléments réguliers (ou simplifiables) .

1. تعريف :

ليكن $(E,\perp,*)$ حلقة واحدية (مع $E\neq\{e\}$ و e هو العنصر المحايد للقانون الأول $\perp$ في E) .

- كل عنصر x من E له مماثل بالنسبة للقانون الثاني * يسمى عنصر قابل للمماثلة للحلقة E .
- كل عنصر x من E منتظم بالنسبة للقانون الثاني * يسمى عنصر منتظم للحلقة E .

2. ملحوظة : بالنسبة للقانون الثاني * .نرمز لمماثل a ب a^{-1} بدل من a'

3. أمثلة :

- $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية حيث $u=1$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في $\mathbb{Z}$.

لدينا : مجموعة العناصر القابلة للمماثلة هي $U=\{-1,1\}$. يمكنك أن تبين أن : $(\{-1,1\},\times)$ زمرة تبادلية .

4. تمرين تطبيقي :

نأخذ التمرين السابق حيث :

لنعتبر الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حيث

- $\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$.
- $\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)\mp(a',b')=(aa',bb')$.

1. بين أن : مجموعة العناصر القابلة للمماثلة هي $U=\{(-1,-1);(-1,1);(1,-1);(1,1)\}$.
2. بين أن : $(U,\times)$ زمرة تبادلية .

5. خاصية :

ليكن $(E,\perp,*)$ حلقة واحدية . U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة .

- U جزء مستقر في $(E,*)$.
- $(U,*)$ زمرة .

6. برهان :

- نبين أن : U جزء مستقر في $(E,*)$.

ليكن a و b من U حيث a^{-1} و b^{-1} مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الثاني $*$.

لدينا : $a*b$ يقبل مماثل في $(E,*)$ هو $(a*b)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$ إذن $a*b\in U$.

- نبين أن : $(U,*)$ زمرة .

لدينا : $(E,\perp,*)$ حلقة واحدية إذن $*$ تجمعية في E و بالتالي $*$ تجمعية في U .

لدينا : u العنصر المحايد في $(U,*)$ لأن $u\in U$.

ليكن x من U إذن يقبل مماثله x^{-1} هو عنصر من $(E,*)$. ومنه x^{-1} عنصر من U .

خلاصة : $(U,*)$ زمرة .

E. قواسم الصفر – الحلقة الكاملة : *Diviseurs de zéro - anneau intègre*

1. تعاريف :

لتكن $(E,\perp,*)$ حلقة . e العنصر المحايد للقانون الأول $\perp$ في E .

- ليكن a و b من E نقول إن عنصرين a و b من E قاسمين للصفر إذا كان : $a*b=e$ ولكن $a\neq e$ و $b\neq e$.
- $(E,\perp,*)$ حلقة كاملة إذا كان E لا يحتوي على قواسم الصفر. ($\forall a,b\in E\ :\ a*b=e\Rightarrow a=e$ أو $b=e$)

أو أيضا : أحد العوامل يساوي العنصر المحايد e $\Leftarrow$ مركب لعنصرين بالنسبة للقانون الثاني $*$ منعدم .

2. أمثلة :

❖ مثال 1 :

$(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة .

❖ مثال 2 :

لنعتبر الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حيث

- $\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$
- $\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in\mathbb{Z}^2\ :\ (a,b)\mp(a',b')=(aa',bb')$.

1. نبين أن : $D=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}/a=0$ أو $b=0\}$.
2. هل $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حلقة كاملة .

جواب :

1. نبين أن : $D=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}/a=0$ أو $b=0\}$.

ليكن $(a,b)\neq(0,0)$ قاسم للصفر إذن يوجد (a',b') من $\mathbb{Z}^2$ حيث $(a',b')\neq(0,0)$ و $(a,b)(a',b')=(0,0)$.

لدينا : $(a,b)(a',b')=(0,0)\Rightarrow(aa',bb')=(0,0)$

$\Rightarrow aa'=0$ و $bb'=0$

وهذا ممكن فقط $b=0$ أو $a=0$.

عكسيا :كل زوج على شكل $(a,0)$ مع $a\neq 0$ هو من قواسم للصفر لأنه لكل زوج $(0,b')$ مع $b'\neq 0$ لدينا :

$(a,0)(0,b')=(0,0)$.

بنفس الطريقة : كل زوج على شكل $(0,b)$ مع $b\neq 0$ هو من قواسم للصفر .

خلاصة : $D=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}/a=0$ أو $b=0\}$.

2. $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ ليست بحلقة كاملة لأنها تتوفر على قواسم للصفر .

❖ مثال 3 :

$\left(\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}},+,\times\right)$ ليست بحلقة كاملة لأن $\bar{0}=\bar{6}\times\bar{2}$ ولكن $\bar{0}\neq\bar{2}$ و $\bar{0}\neq\bar{6}$ ($\bar{0}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الأول +) .

❖ مثال 4 :

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ ليست بحلقة كاملة لأن $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ولكن $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الأول +) .

IV. الجسم : *Corps*

1. تعريف :

كل حلقة واحدية $(E,\perp,*)$ حيث كل عنصر من $E\setminus\{e\}$ قابل للمماثلة بالنسبة للقانون الثاني $*$ تسمى جسم .
(مع e العنصر المحايد للقانون الأول $\perp$ في E)

2. ملحوظة :

❖ ملحوظة 1 :

في الغالب الجسم $(E,\perp,*)$ نستعمل K بدل E و $+$ بدل ونسميه القانون الجمع $\perp$ و $\times$ بدل $*$ و نسميه قانون الضرب . و بدل من كتابة $E\setminus\{e\}$ نكتب K^* .

❖ ملحوظة 2 :

$(E,\perp,*)$ جسم إذا كان :

- القانون الأول $\perp$ له بنية زمرة تبادلية في E . (أي $(E,\perp)$ زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني $*$ تجميعي في E .
- القانون الثاني $*$ توزيعي على القانون الأول $\perp$ في E .
- القانون الثاني $*$ يتوفر على العنصر المحايد u (أي الوحدة)
- كل عنصر $x\neq e$ قابل للمماثلة (أي له مماثل) بالنسبة للقانون الثاني $*$ في E .

❖ ملحوظة 3 :

$(E,\perp,*)$ جسم إذا كان :

- القانون الأول $\perp$ له بنية زمرة تبادلية في E . (أي $(E,\perp)$ زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني $*$ توزيعي على القانون الأول $\perp$ في E .
- القانون الثاني $*$ له بنية زمرة في $E\setminus\{e\}$. (أي $(E\setminus\{e\},*)$ زمرة)

❖ ملحوظة 4 :

$(E,\perp,*)$ حلقة واحدية هي جسم إذا وفقط إذا كان $U=E\setminus\{e\}$ (أي جميع عناصر E قابل للتماثل ماعدا العنصر المحايد للقانون الثاني $*$)

❖ ملحوظة 5 :

- إذا كان القانون الثاني $*$ في E تبادلي فإن $(E,\perp,*)$ جسم تبادلي .
- إذا كان E مجموعة منتهية الجسم $(E,\perp,*)$ منتهية .

3. أمثلة :

مثال 1 : $(\mathbb{Z},+,\times)$ ليست بجسم .

مثال 2 : $(\mathbb{Q},+,\times)$ و $(\mathbb{R},+,\times)$ و $(\mathbb{C},+,\times)$ أجسام تبادلية .

مثال 3 : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ ليس بجسم لأن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير قابلة للماثلة .

مثال 4 : $\left(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+,\times\right)$ ليست بجسم لأن $U=\{\bar{1},\bar{7},\overline{11}\} \neq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$ أي $\bar{2}$ غير قابل للتماثل .

4. خاصية :

$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times\right)$ بجسم إذا وفقط إذا كان n عدد أولي .

5. العناصر المنتظم في جسم بالنسبة للقانون الثاني :

❖ خاصية :

$(E,\perp,*)$ جسم .
كل عنصر a من $E\setminus\{e\}$ فهو منتظم بالنسبة للقانون الثاني $*$.

❖ برهان :

بما أن $(E,\perp,*)$ جسم إذن كل عنصر من $E\setminus\{e\}$ فهو قابل للمماثل بالنسبة للقانون الثاني $*$ و $*$ تجمعي إذن a منتظم بالنسبة لهذا القانون حسب خاصية (درس القوانين التركيب الداخلية) .

طريقة 2 :

ليكن a من $E\setminus\{e\}$ إذن a له مماثل بالنسبة ل $*$ ليكن هو a^{-1} .

نبين أن a منتظم على اليمين و على اليسار أي نبين أن لكل x و y من E لدينا : $\begin{cases} (x*a=y*a) \Rightarrow x=y \\ (a*x=a*y) \Rightarrow x=y \end{cases}$

- نبين a منتظم على اليمين بالنسبة ل $*$. أي نبين أن : لكل x و y من E لدينا $(x\perp a=y\perp a) \Rightarrow x=y$

ليكن x و y من E حيث $x*a=y*a$ نبين أن $x=y$

بما أن : $x\perp a=y\perp a$ إذن $(x*a)*a^{-1}=(y*a)*a^{-1}$ (نركب ب a^{-1}) .

إذن : $x*(a*a^{-1})=y*(a*a^{-1})$ (لأن $*$ تجمعي)

ومنه : $x*u=y*u$ (لأن u هو الوحدة ل $*$ أي العنصر المحايد ل $*$) . ومنه : $x=y$

و بالتالي a منتظم على اليمين بالنسبة ل $*$.

- بنفس الطريقة نبين أن منتظم على اليسار بالنسبة ل $*$.

خلاصة : a منتظم على اليمين وعلى اليسار بالنسبة ل $*$.إذن a هو منتظم بالنسبة ل $*$.

6. خاصية :

$(E,\perp,*)$ جسم . حيث e العنصر المحايد بالنسبة ل $\perp$.
$\forall a,b \in E \quad a*b=0 \Rightarrow (a=e$ أو $b=e)$
حالة : $(E,\perp,*)=(K,+,\times)$ و $e=0$ نحصل على : $\forall a,b \in E \quad a\times b=0 \Rightarrow (a=0$ أو $b=e)$

7. نتائج :

- الجسم ليس له قواسم للصفر
- إذا كان $(E,\perp,*)$ جسم فإن $(E,\perp,*)$ حلقة كاملة (والعكس ليس دائما صحيح)
- إذا كان $(E,\perp,*)$ حلقة كاملة فإن $(E,\perp,*)$ ليس بجسم .

8. تمرين :

❖ لنعتبر المعادلة $a*x=b \;/\; x\in E \quad (1)$ في الجسم $(E,\perp,*)$ ؛ مع a و b معلومين من E .

1. بين إذا كان $a=e$ و $b=e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=E$
2. بين إذا كان $a=e$ و $b\neq e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\varnothing$
3. بين إذا كان $a\neq e$ و $b=e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{a^{-1}b\}$

❖ لنعتبر المعادلة $a*x=b \;/\; x\in E \quad (1)$ في الجسم $(E,\perp,*)$ مع a و b معلومين من E .

ناقش حسب قيم a و b مجموعة حلول المعادلة $x*a=b \;/\; x\in E \quad (2)$ ؛ مع a و b معلومين من E .