I. القوانين التركيب الداخلية :

A. تعاريف :

1. تعريف 1 :

E مجموعة غير فارغة .

كل تطبيق على الشكل التالي : $f: E\times E \to E$, $(a,b)\mapsto f((a,b))$ يسمى قانون تركيب داخلي في E. و بدل من استعمال f نستعمل أحد الرموز التالية : $*$ أو T أو $\perp$ أو $\circ$ أو $\wedge$ أو $\vee$ أو $+$ أو $\times$ أو $\otimes$ أو $\oplus$ أو $\odot$ أو ....

- نكتب : $f((a,b)) = a\perp b$.
- نكتب : $(E,\perp)$ ؛ نقول إن E مزود muni بقانون التركيب الداخلي $\perp$.
- $\forall (a,b)\in E\times E : a\perp b \in E$.

2. أمثلة :

- الجمع و الضرب قانونين تركيبين داخليين في كل من المجموعات التالية : $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$.
- $(\mathcal{P}(E),\cap)$ و $(\mathcal{P}(E),\cap)$ و $(\mathcal{P}(E),\Delta)$ لدينا : $\mathcal{P}(E)$ (مجموعة أجزاء E) مزود بقوانين تركيب داخلية .
- الجمع قانون تركيب داخلي في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$ و كذلك في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ أما الجداء السلمي ليس بقانون تركيب داخلي لا في $\mathcal{V}_2$ و لا في $\mathcal{V}_3$ (لأن $\vec{u}.\vec{v}\in\mathbb{R}$) .
- الجداء المتجهي $(\vec{u}\wedge\vec{v})$ قانون تركيب داخلي في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$.
- $E=\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مجموعة التطبيقات في $\mathbb{R}$ (من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$) .

مثال : $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=2x+3$ لدينا : f تطبيق في $\mathbb{R}$ ومنه : $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}),+)$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\times)$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\circ)$ لدينا : $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مزود بقوانين تركيب داخلية هي الجمع و الضرب و تركيب تطبقين

- $E=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مجموعة التطبيقات التقابلية في $\mathbb{R}$ (من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$) .

مثال : $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=2x$ لدينا : f تطبيق تقابلي في $\mathbb{R}$ ومنه : $f\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

الجمع ليس بقانون تركيب داخلي في $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مثال مضاد : $f\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $-f\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ و لكن $f+(-f)=\theta\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ؛ مع θ هو التطبيق المعرف بما يلي : $\theta: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\theta(x)=0$.

3. قانون تركيب داخلي في مجموعة منتهية :

- نشاط :

نعتبر المجموعة $E=\{0,1,2\}$.

1. تأكد أن : $*$ قانون داخلي في E حيث $*$ معرفة كما يلي : $\forall(a,b)\in E\times E : a*b=a+b-ab$.

4. جدول قانون داخلي :

- نلخص النتائج السابقة بالجدول التالي يسمى جدول $(E,*)$.

جدول $(E,*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

- أنشئ جدول : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\times)$

جدول $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\times\right)$						مثال n=5	جدول $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+\right)$					
$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$		$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

II. مصفوفات :

A. مجموعة المصفوفات $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:

1. تعريف :

ليكن m و n من $\mathbb{N}^*$ مصفوفة $m\times n$ هو جدول من الأعداد الحقيقية متكون من m من الأسطر (lignes) و n من الأعمدة (colonnes) ونكتب $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

- الأعداد الحقيقية a_{ij} تسمى معاملات المصفوفة A .
- متفق عليه : المدل الأول i هو رقم السطر . المدل الثاني j هو رقم العمود .
- نكتب المصفوفة A على الشكل التالي : $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ أو أيضا $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m\ ,\ 1\le j\le m}$.

2. للتوضيح :

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ligne n° 1} \\ \leftarrow \text{ligne n° 2} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{colonne n° 2}} \end{array}$$

3. أمثلة و مفردات :

- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من سطر و خمسة أعمدة .
- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من ثلاثة أسطر و عمود واحد .
- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من سطرين و ثلاثة أعمدة من .

- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من سطرين و عمودين . تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 2 .
- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & -7 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من ثلاثة أسطر و ثلاثة أعمدة . تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 3 .
- نعتبر المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. التوضيح التالي:

$$\begin{array}{r} \\ \text{vecteur ligne n° 2} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 13 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

vecteur colonne n° 4

.

1. المصفوفة : $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ تسمى متجهة سطر رقم 2 للمصفوفة A .
2. المصفوفة : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ تسمى متجهة عمود رقم 4 للمصفوفة A .

4. مفردات و رموز و أمثلة :

- مجموعة المصفوفات $m\times n$ نرمز لها ب : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- حالة $m=n$ المصفوفة $n\times n$ تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة n أما المجموعة $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ نرمز لها باختصار $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$. مثال :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & -7 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

- في $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$:

1. المصفوفة المنعدمة : حيث لكل i و j من $\{1,2,...,n\}$ لدينا : $a_{ij}=0$ و $a_{ij}=0$. نرمز لها ب $0_n = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$.

مثال : $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة المنعدمة ل $\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$. $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة المنعدمة ل $\mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$.

2. المصفوفة الواحدة : حيث لكل i و j من $\{1,2,...,n\}$ لدينا : $a_{ii}=1$ و $a_{ij}=0$ مع $i\neq j$. نرمز لها ب

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

مثال : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ مصفوفة الواحدة ل $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ مصفوفة الواحدة ل $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B. العمليات في مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 أو 3 (أي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ أو في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) .

في هذه الفقرة نعتبر المصفوفتين $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ و $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ من المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فقط $n\in\{2,3\}$.

1. الجمع في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

1. تعريف :

مجموع المصفوفتين A و B هي المصفوفة $S=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$ مع $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ونكتب : $S=A+B$.

- حالة $n=2$: $A+B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{21}\end{pmatrix}$.
- حالة $n=3$: $A+B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$

2. مثال :

مثال ل $n=2$:

- مثال 1 : $\begin{pmatrix}-5&2\\11&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-7\\1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\12&8\end{pmatrix}$ مثال 2 : $\begin{pmatrix}-5&2\\11&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\11&0\end{pmatrix}$.

مثال ل $n=3$:

- مثال 1 : $\begin{pmatrix}1&4&5\\0&3&-8\\7&10&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&0&-1\\2&7&14\\3&2&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&4&4\\2&10&6\\10&12&0\end{pmatrix}$ مثال 2 : $\begin{pmatrix}4&-2&0\\3&7&-8\\1&-5&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&6&11\\4&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&13&3\\5&-5&8\end{pmatrix}$

2. الضرب مصفوفة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ في عدد حقيقي :

1. تعريف :

λA : جداء عدد حقيقي λ في المصفوفة A هي المصفوفة : $\lambda A=\lambda(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 2}}=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 2}}$

- حالة $n=2$: $\lambda\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}\end{pmatrix}$.
- حالة $n=3$: $\lambda A=\lambda\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\lambda a_{23}\\\lambda a_{31}&\lambda a_{32}&\lambda a_{33}\end{pmatrix}$

2. مثال :

$$2\times\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 4\\ 22 & 0\end{pmatrix}$$ و $$1\times\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}$$ و $$0\times\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. جداء مصفوفتان :

1. تعريف :

جداء المصفوفتين A و B هي المصفوفة $P=\left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ مع $c_{ij}=\sum_{k=1}^{k=n}a_{ik}b_{kj}$ ونكتب : $P=A\times B$.

من أجل $n=2$ لدينا : $c_{ij}=\sum_{k=1}^{k=2}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}$.

من أجل $n=3$ لدينا : $c_{ij}=\sum_{k=1}^{k=3}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$.

2. ملحوظة :

- لحساب المعامل c_{ij} في المصفوفة P نأخذ متجهة السطر رقم i من A و متجهة العمود رقم j من B (ونحسب ذلك على شكل الجداء السلمي) .

❖ توضيح ل $n=2$: $a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}$ $$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\end{pmatrix}$$.

مثال : لإيجاد المعامل $\boxed{?}=c_{21}$ في الجداء التالي : $$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \boxed{?} & \cdots\end{pmatrix}$$ نأخذ السطر 2 من المصفوفة الأولى و العمود رقم 1 من المصفوفة الثانية ومنه : $$\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 11\end{pmatrix}=2\times3+5\times11=61=\boxed{?}$$.

3. أمثلة :

- $$\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\times3+2\times1 & -5\times(-7)+2\times8\\ 11\times3+0\times1 & 11\times(-7)+0\times8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 51\\ 33 & -77\end{pmatrix}$$.
- $$\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ ؛ $$\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 11 & 0\end{pmatrix}$$

❖ توضيح ل $n=3$: $$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\end{pmatrix}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$$.

مثال : لإيجاد المعامل $\boxed{?}=c_{23}$ في الجداء التالي : $$\begin{pmatrix}10 & 5 & 3\\ 6 & 4 & 1\\ 9 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 9\\ 5 & 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \boxed{?}\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$ نأخذ السطر 2 من المصفوفة

الأولى و العمود رقم 3 من المصفوفة الثانية ومنه : $\boxed{?}=\begin{pmatrix}-6 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\9\\8\end{pmatrix}=-6\times2+4\times9+1\times8=32$

- للحصول على جميع معاملات المصفوفة $P=A\times B$ يتم بإجراء الجداء لكل سطر من المصفوفة الأول A بأعمدة المصفوفة الثانية B.

مثال:

✓ نتمم الجداء السابق: $\begin{pmatrix}1 & 7\\ \boxed{2 \quad 5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{3} & 4\\ \boxed{11} & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \boxed{?} & \cdots\end{pmatrix}$

نحصل على $\begin{pmatrix}1 & 7\\ \boxed{2 \quad 5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{3} & 4\\ \boxed{11} & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+77 & 4+63\\ 6+55 & 8+45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80 & 67\\ 61 & 53\end{pmatrix}$

مثال:

✓ نتمم الجداء السابق: $\begin{pmatrix}10 & 5 & 3\\ \boxed{6 \quad 4 \quad 1}\\ 9 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & \boxed{2}\\ 0 & 6 & \boxed{9}\\ 5 & 3 & \boxed{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \boxed{?}\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$

نحصل على $\begin{pmatrix}10 & 5 & 3\\ \boxed{6 \quad 4 \quad 1}\\ 9 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & \boxed{2}\\ 0 & 6 & \boxed{9}\\ 5 & 3 & \boxed{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+0+15 & 40+30+9 & 10+45+24\\ 6+0+5 & 24+24+3 & 12+36+8\\ 9+0+35 & 36+0+21 & 18+0+56\end{pmatrix}$

4. ملحوظة :

$n\in\{2,3\}$ و 0_n المصفوفة المنعدمة و I_n المصفوفة الوحدة من مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة n. لدينا :

أ- بعض مميزات المصفوفة المنعدمة 0_n .

- $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ A+0_n=A\ ,\ 0_n+A=A$

✓ بالنسبة ل $n=2$: $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

✓ مثال : $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

✓ بالنسبة ل $n=3$: $\begin{pmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{pmatrix}$

✓ مثال : $\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ -4 & 2 & 3\\ 7 & 10 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ -4 & 2 & 3\\ 7 & 10 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ -4 & 2 & 3\\ 7 & 10 & 8\end{pmatrix}$.

- $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ A0_n=A\ ,\ 0_nA=0_n$

✓ بالنسبة ل $n=2$: $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

✓ مثال : $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

✓ بالنسبة ل $n=3$: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

✓ مثال : $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5&1\\-4&2&3\\7&10&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&1\\-4&2&3\\7&10&8\end{pmatrix}$

ب- بعض مميزات المصفوفة الواحدة I_n .

• لدينا : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ A\times I_n=A\ ,\ I_n\times A=A$

✓ بالنسبة ل $n=2$: $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ (

✓ مثال : $\begin{pmatrix}2&3\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-4&1\end{pmatrix}$

✓ بالنسبة ل $n=3$: $\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}$

✓ مثال : $\begin{pmatrix}1&5&1\\-4&2&3\\7&10&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5&1\\-4&2&3\\7&10&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&1\\-4&2&3\\7&10&8\end{pmatrix}$

• لدينا : $A\times 0_2=0_2\times A=0_2$ أي : $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

5. خاصيات :

• في المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ لدينا : $A+B=B+A$: $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ أي : $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

6. ملحوظة :

• الضرب ليس بتبادلي دائما في المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ لدينا : $AB=BA$

مثال مضاد :

✓ $\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

✓ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

III. جزء مستقر – قانون مستخلص : Partie stable – Loi induite

1. تعريف :

لتكن $(E,\perp)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $\perp$ (anti truc) و S جزء غير فارغ من E (أي $S\subset E$ و $S\neq\varnothing$) .

• S هو جزء مستقر في $(E,\perp)$ يكافئ : $\forall(x,y)\in S^2\ :\ x\perp y\in S$.

• القانون التركيب الداخلي المعرف في S انطلاقا من القانون $\perp$ يسمى قانون مستخلص و يرمز له كذلك ب $\perp$.

2. أمثلة :

✓ مثال 1 :

لنعتبر جدول القانون التركيب الداخلي $*$ في $E=\{0,1,2\}$. حيث : $a*b=a+b-ab$

جدول $(E,*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

1. تأكد بأن : $S=\{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$.
2. تأكد بأن : $S=\{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$.
3. هل $S=\{1,2\}$ مستقر في $(E,*)$ ؟

جواب :

1. نتأكد أن $S=\{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$.

نعم $S=\{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$

لدينا : القانون المستخلص في S حسب الجدول هو

جدول $(S,*)$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	1

الجدول أمامه يوضح ذلك :

جدول $(E,*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

2. نتأكد أن $S=\{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$.

نعم $S=\{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$

القانون المستخلص في S حسب الجدول هو

جدول $(S,*)$

$*$	0	2
0	0	2
2	2	0

الجدول أمامه يوضح ذلك :

جدول $(E,*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

3. ندرس هل $S=\{1,2\}$ مستقر في $(E,*)$ ؟

حسب الجدول $S=\{1,2\}$ غير مستقر لأنه يوجد زوج $(2,2)$ من S^2 حيث :

$2*2=0\notin S$

جدول $(E,*)$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

✓ مثال 2 :

المجموعة $\mathbb{N}$ مستقرة في $(\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{Z},\times)$ و $(\mathbb{Q},\times)$ و $(\mathbb{R},\times)$.

✓ مثال 3 :

المجموعة $\mathbb{Z}^-$ غير مستقرة في $(\mathbb{Z},\times)$ و $(\mathbb{Q},\times)$ و $(\mathbb{R},\times)$ و لكن مستقرة في $(\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{R},+)$.

✓ مثال 4 :

المجموعة $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/x\in\mathbb{R}\right\}$ غير مستقرة في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

لأن : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\notin\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$

✓ مثال 5 :

المجموعة $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/x\in\mathbb{R}\right\}$ مستقرة في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

ليكن : $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ من $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$

لدينا : $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=xy\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$.

IV. خاصيات القوانين التركيب الداخلية :

A. التجمعية : *L'associativité*

1. تعريف :

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي $\perp$.

القانون $\perp$ تجمعي في E إذا وفقط إذا كان $\forall(a,b,c)\in E^3 : (a\perp b)\perp c=a\perp(b\perp c)$.

وفي هذه الحالة يمكن أن نكتب : $a\perp b\perp c$ بدل من $(a\perp b)\perp c$ أو $a\perp(b\perp c)$

2. أمثلة :

مثال 1 : سبق أن درسنا : الجمع و الضرب بأنهما قانونين تجمعيين في كل من $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$.

مثال 2 : سبق أن درسنا : الجمع بأنه قانون تجمعي في كل من المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$ و في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_3$.

مثال 3 : الجمع بأنه قانون تجمعي في كل من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

مثال 4 : الجمع بأنه قانون تجمعي في $S_2(\mathbb{R})$ مجموعة المتتاليات العددية .

مثال 5 : الجمع و الضرب قانونين تجمعيين في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. خاصية :

- إذا كان القانون التركيب الداخلي $\perp$ تجميعي في E فإنه تجمعي في كل جزء S مستقر في $(E,\perp)$.
- العكسي غير صحيح دائما .

B. التبادلية : *La commutativité*

1. تعريف :

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي $\perp$.

القانون $\perp$ تبادلي في E إذا وفقط إذا كان $\forall(a,b)\in E^2 : a\perp b=b\perp a$.

2. أمثلة :

- الأمثلة السابقة تبقى صحيحة بتعويض كلمة تجمعي ب كلمة تبادلي .
- نعلم أن الجداء المتجهي $(\vec{u}\wedge\vec{v})$ قانون تركيب داخلي في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$. ولكن غيي تبادلي في $\mathcal{V}_3$ لأن $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

3. تمرين تطبيقي :

لنعتبر القانون التركيب الداخلي $*$ في $\mathbb{R}$. حيث : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a*b=a+b-ab$.

1. هل القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{R}$ ؟
2. هل القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{R}$ ؟
3. هل القانون $*$ مستقر في $\mathbb{N}$ ؟
4. هل القانون $*$ مستقر في $\mathbb{Z}$ ؟

4. خاصية :

- إذا كان القانون التركيب الداخلي $\perp$ تجميعي في E فإنه تجمعي في كل جزء S مستقر في $(E,\perp)$.

C. العنصر المحايد : *L'élément neutre*

1. تعريف :

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي $\perp$ و e عنصر من E .
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $\perp$ (أو عنصر محايد في $(E,\perp)$) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall a\in E : a\perp e=a \text{ و } e\perp a=a$$

2. ملحوظة :

إذا كان القانون تبادلي فإن أحدى المتساويتين تكفي .

3. أمثلة :

مثال 1 : العدد صفر(0) عنصر محايد بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$.

مثال 2 : العدد واحد (1) عنصر محايد بالنسبة للضرب في كل من $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$.

مثال 3 : المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$) عنصر محايد بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$.

مثال 4 : المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$) عنصر محايد بالنسبة للجمع في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$.

مثال 5 : المصفوفة المنعدمة $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ بالنسبة للضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

مثال 6 : المصفوفة المنعدمة $0_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0.\end{pmatrix}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ و $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

مثال 7 : الصنف $\bar{0}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

مثال 8 : الصنف $\bar{1}$ عنصر محايد بالنسبة للضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

مثال 9 : الإزاحة ذات المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$) عنصر محايد بالنسبة للمركب إزاحتين في $E=\mathcal{T}(\mathcal{V}_2)$ مجموعة الإزاحات في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$. (نعلم أن $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}$) .

4. خاصية :

إذا كان القانون التركيب الداخلي $\perp$ في E يتوفر على عنصر محايد فإن هذا العنصر وحيد .

5. برهان :

نستدل على ذلك بالخلف :

نفترض هناك على الأقل عنصرين محايدين e و 'e في $(E,\perp)$.

- بما أن : e عنصر محايد إذن $e\perp e'=e'$ (1) .
- بما أن : 'e عنصر محايد إذن $e\perp e'=e$ (2) .

حسب : (1) و (2) نحصل على $e=e'$

6. خاصية :

> ليكن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و e العنصر المحايد ل $\perp$ و S جزء مستقر في $(E,\perp)$.
> إذا كان $e\in S$ فإن e هو العنصر المحايد في $(S,\perp)$.

D. مماثل عنصر : *Symétrique d'un élément*

1. تعريف :

> ليكن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و e العنصر المحايد ل $\perp$ و a عنصر من E .
> عنصر a من E يقبل مماثلا 'a في $(E,\perp)$ إذا وفقط إذا كان : $\exists a'\in E : a\perp a'=e$ و $a'\perp a=e$

2. ملحوظة :

- إذا كان القانون تبادلي فإن أحدى المتساويتين تكفي .
- كذلك 'a مماثلة a بالنسبة ل $\perp$ إذن a و 'a متماثلين بالنسبة ل $\perp$.
- بالنسبة للقانون التركيبي $+$ العنصر المحايد يرمز له ب: 0 أو θ أو $\vec{0}$ و للمماثل a ب $-a$ (مقابل) مثلا لمماثل الدالة f ب $-f$ ؛ ل $\vec{u}$ ب $-\vec{u}$.
- بالنسبة للقانون التركيبي $\times$ العنصر المحايد يرمز له ب: 1 أو I_E أو I_n و للمماثل a ب a^{-1} (مقلوب) مثلا لمماثل المصفوفة A ب A^{-1} .

3. أمثلة :

مثال 1 : بالنسبة للجمع : 0 هو العنصر الوحيد الذي له مماثل (أي مقابل) هو 0 في $\mathbb{N}$ أما في $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ كل الأعداد لها مماثل (أي مقابل).

مثال 2 : بالنسبة للضرب: 1 هو العنصر الوحيد الذي له مماثل (أي مقلوب) هو 1 في $\mathbb{N}$ أما في $\mathbb{Z}$ فقط 1 و 1- (مماثليهما هما 1 و 1- ($\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ كل الأعداد لها مماثل (أي مقلوب) ما عدا الصفر ليس له مماثل (أي مقلوب) .

مثال 3 :مماثل المتجهة $\vec{u}$ في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$ هي $-\vec{u}$ بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$.

مثال 4 :مماثل المتجهة $\vec{u}$ في الفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$ هي $-\vec{u}$ بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_3$.

مثال 5 :مماثل المصفوفة (أي مقابل) $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي المصفوفة $-A=\begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$.

مثال 6 :مماثل المصفوفة (أي مقلوب) $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي المصفوفة $A'=A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

لأن : لدينا : $AA^{-1}=\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11-10 & -22+22 \\ 5-5 & -10+11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-10 & 2-2\\ -55+55 & -10+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

إذن : $AA^{-1}=I_2$ و $A^{-1}A=I_2$.

مثال 7 : بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{4}$ (لأن $\bar{4}+\bar{3}=\bar{3}+\bar{4}=\bar{0}$) أما بالنسبة للضرب مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{5}$ (لأن $\bar{3}\times\bar{5}=\bar{5}\times\bar{3}=\overline{15}=\bar{1}$) .

مثال 8 : بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{4}$ (لأن $\bar{4}+\bar{3}=\bar{3}+\bar{4}=\bar{0}$) أما بالنسبة للضرب مماثل (أي مقلوب) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{5}$ (لأن $\bar{3}\times\bar{5}=\bar{5}\times\bar{3}=\overline{15}=\bar{1}$) .

مثال 9 :مماثل $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ (في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$) هي الإزاحة $t_{-\vec{u}}$ ذات المتجهة $-\vec{u}$ بالنسبة للمركب إزاحتين في $E=\mathcal{T}(\mathcal{V}_2)$ مجموعة الإزاحات في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$. (نعلم أن $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}$) .

4. خاصية :

> إذا كان $\perp$ قانون تركيب داخلي تجميعي في E و a من E يقبل مماثلا a' في $(E,\perp)$ فإن المماثل a' وحيد .

5. برهان : نستدل على ذلك بالخلف :

نفترض هناك على الأقل عنصرين مماثلين و مختلفين a' و a'' لـ a في $(E,\perp)$.

- بما أن : a' مماثل لـ a إذن $a\perp a'=e$. ومنه $a''\perp a\perp a'=a''\perp e=a''$ (1) .
- بما أن : a'' مماثل لـ a إذن $a''\perp a=e$. ومنه : $a''\perp a\perp a'=e\perp a'=a'$ (2) .

حسب : (1) و (2) نحصل على $a''=a'$. وهذا يناقض الافتراض .

خلاصة : $a''=a'$

6. خاصية :

> $\perp$ قانون تركيب داخلي تجميعي في E .
> إذا كان a' و b' مماثلين لـ a و b على التوالي في $(E,\perp)$ فإن العنصر $a\perp b$ من E له مماثل هو $b'\perp a'$ بالنسبة لـ $\perp$.

7. برهان :

نتحقق بأن : $b'\perp a'$ هو مماثل $a\perp b$.

لدينا : $(a\perp b)\perp(b'\perp a')=a\perp b\perp b'\perp a'=a\perp(b\perp b')\perp a'=a\perp e\perp a'=a\perp a'=e$.

بنفس الطريقة نبين أن : $(b'\perp a')\perp(a\perp b)=e$

ومنه : $(a\perp b)\perp(b'\perp a')=e$ و $(b'\perp a')\perp(a\perp b)=e$.

خلاصة : $a\perp b$ من E له مماثل هو $b'\perp a'$ بالنسبة لـ $\perp$

E. عنصر منتظم : *Élément régulier*

1. تعريف :

> ليكن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و a عنصر من E .
> a عنصر منتظم في $(E,\perp)$ إذا وفقط إذا كان لكل x و y من E لدينا : $\begin{cases}(x\perp a=y\perp a)\Rightarrow x=y\\ (a\perp x=a\perp y)\Rightarrow x=y\end{cases}$

2. ملحوظة :

إذا كان القانون تبادلي فإن أحد الاستلزامين يكفي .

3. أمثلة :

- بالنسبة للجمع في $\mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ جميع الأعداد هي منتظمة .
- بالنسبة للضرب في $\mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ جميع الأعداد هي منتظمة ماعدا 0 .
- في $\left(\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}},\times\right)$ لدينا : $\bar{4}\times\bar{5}=\bar{4}\times\bar{1}$ ولكن $\bar{5}\neq\bar{1}$ و لدينا كذلك : $\bar{4}\times\bar{5}=\bar{4}\times\bar{3}$ ولكن $\bar{5}\neq\bar{3}$.

4. خاصية :

> $\perp$ قانون تركيب داخلي تجميعي في E .
> إذا كان a يقبل مماثلا في $(E,\perp)$ فإن العنصر a من E منتظم في $(E,\perp)$.

V. التشاكل *L'homomorphisme* .

1. تعريف :

> ليكن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و $*$ قانون تركيب داخلي في F و f تطبيق من E نحو F . (أي $f : (E,\perp)\to(F,*)$)
> التطبيق f هو تشاكل من $(E,\perp)$ إلى $(F,*)$ إذا وفقط إذا كان: $\forall x,y\in E : f(x\perp y)=f(x)*f(y)$

2. ملحوظة :

- إذا كان التطبيق f تقابلي فالتشاكل f يسمى تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ إلى $(F,*)$. *isomorphisme de* $(E,\perp)$ *vers* $(F,*)$.
- تشاكل أي يحول القانون $\perp$ إلى القانون $*$.

3. أمثلة :

- نعتبر $(E,\perp)=(]0,+\infty[,\times)$ و $(F,*)=(\mathbb{R},+)$ و التطبيق

$$\begin{aligned} f :\ &]0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto f(x)=\ln(x) \end{aligned}$$

لدينا : $\forall x,y\in]0,+\infty[: \ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$

أي : $\forall x,y\in]0,+\infty[: f(x\times y)=f(x)+f(y)$

خلاصة : التطبيق f هو تشاكل من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$ أو أيضا الدالة $f(x)=\ln(x)$ هي تشاكل من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$.

ملحوظة : الدالة $f(x)=\ln(x)$ هي تقابل من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$ (لأنه متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن لها دلة عكسية)

إذن f تشاكل تقابلي من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$.

- نفس الشيء الدالة $f(x)=e^x$ هي تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ إلى $(]0,+\infty[,\times)$ وضح ذلك .

4. خاصيات :

خاصية 1 :

> ليكن f تشاكل من $(E,\perp)$ إلى $(F,*)$.
> إذا كان S جزء مستقر من $(E,\perp)$ فإن صورته S' ب f (أي $S'=f(S)$) مستقرة بالقانون المستخلص $*$.

5. برهان :

لهذا نبين لكل x' و y' من $S'=f(S)$ لدينا : $x'*y'\in S'=f(S)$.

بما أن x' و y' من $S'=f(S)$ إذن يوجد x و y من S حيث : $x'=f(x)$ و $y'=f(y)$.

نحسب $x'*y'$:

لدينا : $x'*y'=f(x)*f(y)$

$=f(x\perp y)$

ونعلم $x\perp y\in S$ (لأن S مستقر) إذن $f(x\perp y)\in S'$ أي $x'*y'\in f(S)=S'$.

خلاصة : $S'=f(S)$ مستقر بالقانون المستخلص $*$.

6. ملحوظة :

$f(E)$ جزء مستقر في $(F,*)$.

خاصية 2 :

ليكن f تشاكل من $(E,\perp)$ إلى $(F,*)$.

- إذا كان القانون $\perp$ تبادلي في E فإن القانون المستخلص $*$ تبادلي في $f(E)$.
- إذا كان القانون $\perp$ تجمعي في E فإن القانون المستخلص $*$ تجمعي في $f(E)$.
- إذا كان القانون $\perp$ له عنصر محايد e في E فإن القانون المستخلص $*$ له عنصر محايد هو $f(e)$ في $f(E)$.
- إذا كان a' مماثل a بالنسبة للقانون $\perp$ فإن القانون $f(a')$ مماثل $f(a)$ بالنسبة للقانون المستخلص $*$ في $f(E)$.
- إذا كان a منتظم بالنسبة للقانون $\perp$ و f تشاكل تبايني فإن $f(a)$ منتظم بالنسبة للقانون المستخلص $*$ في $f(E)$.

7. برهان :

لهذا نبين لكل x' و y' و z' من $f(E)$ لدينا : $(x'*y')*z'=x'*(y'*z')$

بما أن x' و y' و z' من $f(E)$ إذن يوجد x و y و z من E حيث : $x'=f(x)$ و $y'=f(y)$ و $z'=f(z)$

لدينا :

$$\begin{aligned}(x'*y')*z' &= (f(x)*f(y))*f(z)\\ &= f(x\perp y)*f(z)\\ &= f((x\perp y)\perp z)\\ &= f(x\perp(y\perp z))\\ &= f(x)*f(y\perp z)\\ &= f(x)*(f(y)*f(z))\\ &= x'*(y'*z')\end{aligned}$$

ومنه : $(x'*y')*z'=x'*(y'*z')$

خلاصة : القانون المستخلص $*$ تجمعي في $f(E)$.