

الأستاذ : أحمد مومني

تمارين حول درس
الحسابيات

ثانوية الجولان التأهيلية

بيوكري

السنة الثانية علوم رياضية

التمرين رقم 01

$$1 - \text{بين أن: } \sum_{p=1}^n p^3 = \left(\sum_{p=1}^n p^2 \right)$$

$$2 - \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع: } S_n = \sum_{p=1}^n p^3 \text{ و } d_n = S_n \wedge S_{n+1}$$

a - أحسب d_n في حالة n عدد فردي وفي حالة n عدد زوجي

b - استنتج أن: $S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = 1$ و أن $d_n \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

التمرين رقم 02:

ليكن α و β و n ثلاثة أعداد صحيحة نسبية غير منعدمة بحيث : $2n^2 = (\alpha - 2n)(\beta - 2n)$

نضع : $d = (\alpha - 2n) \wedge (\beta - 2n)$

1 - ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{Z}^*$

a - بين أن : $|x| = 1 \Rightarrow (x \wedge y = 1 \text{ و } x^2 / y^2)$

b - استنتج أن : $x^2 / y^2 \Rightarrow x / y$

2 - a - استنتج إذا كان d فردي فإن d / n

b - استنتج إذا كان d زوجي فإن $d / 2n$

c - استنتج أن: d يقسم $\alpha \wedge \beta$

3 - بين أن: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta - 2n)^2$ و استنتج أن: $\alpha \wedge \beta$ يقسم d

4 - بين أن: $\alpha \wedge \beta$ يقسم n

التمرين رقم 03:

ليكن α و β عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $\alpha \wedge \beta = 1$ و $1 < \beta < \alpha$

β_1 و β_2 و $\dots$ و β_n أعداد صحيحة طبيعية بحيث: $\beta_i \wedge \beta = 1$ و $\beta_i < \beta$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

1 - بين أن: β_i يقبل مقلوبا في المجموعة $\mathbb{Z} / \beta \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

2 - بين أن: $\alpha \beta_i$ غير قابل للقسمة على β $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

3 - لكل $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ليكن r_i باقي القسمة الاقليدية للعدد $\alpha \beta_i$ على β

a - بين أن: $r_i \wedge \beta = 1$ مهما يكن $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

b - بين أنه لكل i و j من $\{1, 2, \dots, n\}$ بحيث $i \neq j$ فإن $r_i \neq r_j$

c - حدد المجموعة $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

d - بين أن : $1[\beta] \equiv \alpha^n$

4 - بين أن العدد $17^6 - 1$ يقبل القسمة على 6

التمرين رقم 04:

1 - a بين أن : $(2n+1)\Lambda n^2 = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ - b استنتج أن:

$(\forall (n,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \quad d / (2n+1) \Rightarrow d \Lambda n^2 = 1$

2 - حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث

$$(2n+1)\Lambda 5 = 5$$

3 - a بين أن :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n^2(n^2+1)\Lambda(2n+1) = (2n+1)\Lambda 5$

- b حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث

$$n^2(n^2+1)\Lambda(2n+1) = 1$$

التمرين رقم 05:

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين يحققان النظام التالية :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ x \Lambda y = 1 \end{cases}$$

1 - بين أن x و y ليست لهما نفس الزوجية

2 - نفترض أن x زوجي

- a بين أن : $(25-x)\Lambda(25+x) = 1$

- b بين أنه يوجد عددين صحيحين طبيعيين n و p بحيث:

$$\begin{cases} 25+x = p^2 \\ 25-x = n^2 \\ n \Lambda p = 1 \end{cases}$$

3 - حدد العددين الصحيحين الطبيعيين x و y

4 - استنتج في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ مجموعة حلول المعادلة

$$x^2 + y^2 = 625$$

التمرين رقم 06:

1 - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $5x - 7y = 5$

2 - حدد الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق المعادلتين :

$$x \equiv 0[5] \quad \text{و} \quad x \equiv 5[7]$$

3 - ليكن n عددا صحيحا طبيعيا كتابته في أنظمة العد ذات الأساس

$$n = \overline{\alpha 30002 \beta}^{(6)}$$

حدد α و β لكي يكون n قابلا للقسمة على العدد 35

التمرين رقم 07:

1 - حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y و z التي تحقق

- a النظام التالية

$$\begin{cases} \overline{xyzx}^{(10)} \equiv 0 [7] \\ \overline{xyzx}^{(10)} \equiv 1 [99] \end{cases}$$

- b المعادلة $\overline{xyz}^{(7)} = \overline{zyx}^{(11)}$

التمرين رقم 08:

ليكن n عددا أوليا أكبر من أو يساوي 3

1 - بين أن : n يقسم C_n^p مهما يكن $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

2 - لكل p من $\{1, 2, \dots, n-1\}$ نضع $U_p = \frac{1}{n} C_n^p$

- a بين أن : n يقسم $pU_p + (-1)^p$ مهما يكن

$$p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

- b بين أن : $2^n - 2 = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$

3 - ليكن $\bar{p}$ صنف تكافؤ p و $(\bar{p})^{-1}$ مقلوب $\bar{p}$ في المجموعة

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

- a بين أن : $\bar{1}^{-1} + \bar{2}^{-1} + \dots + \bar{(n-1)}^{-1} = \bar{0}$

- b بين أن : $\bar{1}^{-1} + \bar{2}^{-1} + \dots + \bar{(n-2)}^{-1} = \left(\frac{2^{n-1}-1}{n} \right)$

التمرين رقم 09:

1 - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 2y = 1$ (E)

2 - ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و

$$d = (2n+1)\Lambda(21n+4)$$

- a بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (E)

- b بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$

- c بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$

4 - نضع $A_n = 21n^2 - 17n - 4$ و

$$B_n = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$$

- a بين أن العددين A_n و B_n قابلان للقسمة على $n-1$ في $\mathbb{Z}$

- b حدد حسب قيم العدد n القاسم المشترك الأكبر للعددين

التمرين رقم 10:

I - حدد في أنظمة العد العشري العددين الصحيحين الطبيعيين اللذين

يكتبان في أنظمة العد ذات الأساس 5 على الشكل التالي : $\overline{n01n}^{(5)}$

حيث n عدد صحيح طبيعي أولي

II - 1 - ليكن α و β عددين صحيحين طبيعيين بحيث :

$$p^2 = (\alpha + \beta)\Lambda\alpha\beta \quad \text{و} \quad p \text{ عدد صحيح طبيعي أولي}$$

- a بين أن : p^2 / α^2 و استنتج

- b بين أن $\alpha\Lambda\beta = p$ أو $\alpha\Lambda\beta = p^2$

2 - نعتبر في $\mathbb{N}^2$ النظام التالية

$$(S): \begin{cases} (\alpha + \beta)\Lambda\alpha\beta = 49 \\ \alpha\beta = 231 \end{cases}$$

- a بين أن $\alpha\Lambda\beta = 7$

- b حل في $\mathbb{N}^2$ النظام (S)

- تمارين من الامتحانات الوطنية حول درس الحسابيات -

التمرين الأول (الدورة الاستدراكية – 2007)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظام (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة نسبية و $p \wedge q = 1$

1- أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S)

2 - ليكن x حلا للنظمة (S) بين أن pq يقسم $x - x_0$

3 - ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم $x - x_0$ بين أن x حل للنظمة (S)

4 - استنتج مجموعة حلول النظمة (S)

5 - حل في $\mathbb{Z}$ النظام التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين رقم 02: (الدورة العادية – 2005)

I - p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 5

1 - بين أن : $p^2 \equiv 1[3]$

2 - أ - باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2 - 1 = 4q(q+1)$

ب - استنتج أن : $p^2 \equiv 1[8]$

3 - بين أن : $p^2 \equiv 1[24]$

II - ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع 24

1 - بين أن : $a^2 \equiv 1[24]$

2 - هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و $\dots$ و a_{23} حيث $a_k \wedge 24 = 1$ $\forall k \in \{1, 2, \dots, 23\}$

و $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$

التمرين رقم 03: (الدورة العادية – 2003)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) التالية : $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

ليكن (x, y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

1 - نفترض أن : (x, y) حل للمعادلة (E)

أ - تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$

ب - استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$

ج - بين أن : $a = 1$

د - استنتج أن : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$

2 - حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E)

التمرين رقم 04 (الدورة العادية – 2004)

- 1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا
 (أ) بين أنه إذا كان n فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$
 (ب) بين أنه إذا كان n زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$
 2- لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية
 (أ) بين أن $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربع لعدد صحيح طبيعي)
 (ب) بين أن $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$
 (يمكن ملاحظة $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$)
 (ج) استنتج أن $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا
 (د) بين أن $ab + bc + ac$ ليس مربعا كاملا

التمرين رقم 05 : (الدورة الاستدراكية – 2004)

- (1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 2y = 1$: (E)
 (2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم
 (أ) بين أن الزوج $(4, 21n + 3)$ حل للمعادلة (E)
 (ب) استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أولين فيما بينهما
 (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$
 (أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 13$
 (4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ نضع :
 $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
 (أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $n - 1$ في المجموعة $\mathbb{Z}$
 (ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين رقم 06 : (الدورة العادية – 2007)

- (1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $195x - 232y = 1$: (E)
 (أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232
 (ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$
 (ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$
 (2) بين أن 233 عدد أولي
 (3) لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232
 نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرفة بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233
 نقبل أن: $a^{232} \equiv 1[233] \quad (\forall a \in A \setminus \{0\})$
 (أ) بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $a = b$
 (ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$, حدد بدلالة b
 (ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1}