

$$(t = \ln x) \quad I = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx - 2$$

$$\left(t = \frac{1}{x}\right) \quad I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx - 3$$

$$\left(x = \frac{1}{\sin t}\right) \quad I = \int_{2\sqrt{3}}^2 \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx - 4$$

تمرين 4

$$f(x) = \sin x - 1$$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f والمستقيمين

$$x = 2\pi \text{ و } x = 0$$

$$f(x) = x^2 - 4 - 2$$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f والمستقيمين

$$x = 8 \text{ و } x = 2$$

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = x^3$$

-3 حدد $A(\Delta)$ مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g

$$\text{و المستقيمين } x = 3 \text{ و } x = -1$$

تمرين 5

$$f(x) = x^2 ; f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} - 1$$

أ- احسب V_C حجم مجسم الدوران C المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأضلاع.

أ- احسب V_C' حجم مجسم الدوران C' المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأرتاب.

-2 احسب V_C حجم المجسم C

$$C = \left\{ M(x; y) \in (P) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}; 0 \leq y \leq 1 + \cos 3x \right\}$$

تمرين 6

$$I = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx \text{ بدون حساب } I - 1$$

$$I = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx \text{ أطر } I \text{ بدون حساب } I - 2$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ على } [1; 4] \text{ حدد القيمة المتوسطة لـ } - 3$$

تمرين 7

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

-1 باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد علاقة بين I_n و I_{n-1}

-2 احسب I_0 ثم احسب I_n بدلالة n

الحل

الحساب التكاملية

تمرين 1

احسب ما يلي :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx - 2 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - 1$$

$$I = \int_0^1 e^x dx - 4 \quad I = \int_1^e \frac{1}{x} dx - 3$$

$$(\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx - 5$$

$$I = \int_2^3 (3x^2 + x - 1) dx - 7 \quad I = \int_2^4 3x dx - 6$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x^5} dx - 9 \quad I = \int_0^1 \frac{1}{3x+1} dx - 8$$

$$((\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}) \quad I = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx - 10$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx - 12 \quad I = \int_0^1 6x e^{3x^2+1} dx - 11$$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx - 14 \quad I = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx - 13$$

$$I = \int_1^e \frac{3x^3 + 1}{x} dx - 16 \quad I = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx - 15$$

$$I = \int_3^4 \frac{x-6}{x^2-4} dx - 18 \quad I = \int_0^{e-1} \frac{3x}{x+1} dx - 17$$

$$(\frac{x-6}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+2} \text{ تحقق أن : })$$

تمرين 2

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - 2 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx - 1 \text{ احسب :}$$

$$F(x) = \int_e^x \ln t dt - 4 \quad \int_1^e x \ln x dx - 3$$

تمرين 3

احسب :

$$(t = e^x) \quad I = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx - 1$$

$$I_n = \frac{2^{2(n+1)} (n+1)! \times n!}{(2n+3)!}$$

تمرين 8

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{(1-x)} dx$$

أ - أول هندسيا u_n

ب- حدد u_n بدلالة n ثم استنتج أن (u_n) هندسية متقاربة

$$A_n = u_0 + \dots + u_n$$

ج- حدد A_n بدلالة n ثم بين أن A_n متقاربة

احسب : $\lim A_n$

تمرين 9

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx \quad \text{1- احسب :}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \text{2- } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \text{3-}$$

$$I = \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx \quad \text{4- } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{5-}$$

الحل

$$\sin^5 x = -\frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x) \quad \text{1-}$$

$$\sin^3 x \cos^2 x = -\frac{1}{16} (\sin 5x - \sin 3x - 2 \sin x) \quad \text{2-}$$

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)) \quad \text{3-}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \tan'(x) dx \quad \text{4-}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} : \text{مكاملة بالأجزاء ثم :}$$

5-

$$I = \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx \quad t = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$= \frac{1}{4} \times \int_1^3 \frac{x}{\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 + 1} dx \quad dt = \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_1^2 \frac{2t-1}{t^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1} dt - \int_1^2 \frac{1}{t^2+1} dt \right)$$

$$I = \frac{1}{2} \times \left(\left[\ln(t^2+1) \right]_1^2 - \left[\arctan(t) \right]_1^2 \right)$$

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \quad v' = \sqrt{1-x} = \left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right)'$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x) \sqrt{1-x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 n x^{n-1} (1-x) \sqrt{1-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 n x^{n-1} \sqrt{1-x} dx - \frac{2}{3} \int_0^1 n x^n \sqrt{1-x} dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n I_{n-1} - \frac{2}{3} n I_n$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

إنن :

-2

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I_0 = \frac{2}{3}$$

إنن :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2(n-k)}{2(n-k)+3} I_{n-(k+1)}$$

$$k = n-1$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 3} I_0$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 3} \times \frac{2}{3}$$

$$I_n = \frac{2^{n+1} \times n!}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+3)}$$

إنن :

$$A_n = 3 \times 5 \times \dots \times (2n+3)$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n+2) \times (2n+3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times (n+1)}$$

$$3 \times 5 \times \dots \times (2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} (n+1)!}$$

$$I_n = 2^{n+1} \times n! \times \frac{(n+1)!}{(2n+3)!}$$

تمرين 10

f متصلة وزوجية على مجال $[-a; a]$ ($a \neq 1$; $a > 0$)

بين أن : $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$

استنتج : $J = \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1 + e^x}{e^x + 1} dx$

الحل

-1

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a \left(\frac{f(x)}{1+e^x} + \frac{f(-x)}{1+e^{-x}} \right) dx$$

$$= \int_0^a f(x) \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$\boxed{\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx}$$

-2

$$J = \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1 + e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 1}{e^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 1) dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \left[x^3 + x \right]_0^1 + \left[\ln(e^x + 1) \right]_{-1}^1$$

$$\boxed{J = 1 + \ln\left(\frac{e+1}{e^{-1}+1}\right)}$$

تذكير:

إذا كان : g متصلة على مجال $[a; b]$

و $u(x); v(x)$ قابلتان للإشتقاق على مجال I

و $v(I) \subset [a; b]; u(I) \subset [a; b]$

و : $f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t) dt$

فإن : f قابلة للإشتقاق على المجال I

و $f'(x) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$

تمرين 14

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \ln(e^t - 1) dt & x \in \mathbb{R}_+^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

-1 بين أن f متصلة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

-1 احسب : $I = \int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{1+2e^x} dx$

-2 باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب :

$$J = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x} \ln(1+2e^x) dx$$

الحل

-1

$$I = \int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{1+2e^x} dx \quad t = e^x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t(1+2t)} dt \quad dt = t dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+2t} \right) dt$$

$$= \left[\ln t \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 2 \left[\ln(1+2t) \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\boxed{I = \ln \frac{8}{9}}$$

-2 $J = \int_{-\ln 2}^0 \underset{u'}{e^{-x}} \ln \underset{v}{(1+2e^x)} dx$

تمرين 11

$$A = \int_0^1 (2 + \cos x) e^{1-x} dx$$

-1 بين أن : $A = 2e - 2 + \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx$

-2 نضع : $I = \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx$ و $J = \int_0^1 \sin x \cdot e^{1-x} dx$

باستعمال مكاملة بالأجزاء

بين أن : $J = \sin(1) + I$; $I = -\cos(1) + e - J$

-3 احسب : A

تمرين 12

f متصلة على مجال $[-a; a]$ ($a > 0$)

-1 بين أن : $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$

-2 بين أن إذا كانت f فردية فإن : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

-3 بين أن إذا كانت f زوجية فإن : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

استنتج أن : $I = \int_{-1}^1 (2 + \cos x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = 0$

تمرين 13

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(e^x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) &= 1 \times 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) = 0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2xg(2x) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} tg(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x) = 0}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{فإن :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ متصلة في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{د- اشتقاق } f \text{ في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{لدينا : } \forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{2x} - 1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty}$$

$$\text{إذن : اشتقاق } f \text{ غير قابلة للإشتقاق في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{و : } (C_f) \text{ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل يمين}$$

$$\text{النقطة ذات الأفصول } 0$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln(e^x - 1) \quad \text{نعتبر : 2-}$$

$$\text{أ- ادرس رتبة } g$$

$$\text{ب- استنتج أن : } \forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$$

$$\text{ج- بين أن } f \text{ متصلة في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{د- ادرس اشتقاق } f \text{ في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{هـ - احسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

الحل

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad v(x) = x^2 ; \quad u(x) = x : \text{نعتبر}$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$\text{1- لنبين أن : } f \text{ متصلة قابلة للإشتقاق على } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{لدينا : } g \text{ متصلة على } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{و } v(x) ; u(x) \text{ قابلتان للإشتقاق على } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{و } v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^* ; u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{إذن : } f \text{ متصلة قابلة للإشتقاق على } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{2- أ- رتبة } g$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\text{بما أن : } x > 0 \text{ فإن : } e^x - 1 > 0 \quad \text{إذن : } g \text{ تزايدية قطعاً}$$

$$\text{ب- نستنتج أن : } \forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$$

$$\text{لدينا : } x \leq t \leq 2x$$

$$\text{بما أن : } g \text{ تزايدية فإن : } g(x) \leq g(t) \leq g(2x)$$

$$\text{و بما أن : } x < 2x$$

$$\text{فإن : } \int_x^{2x} g(x) dt \leq \int_x^{2x} g(t) dt \leq \int_x^{2x} g(2x) dt$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)} \quad \text{و منه :}$$

$$\text{ج- لنبين أن : } f \text{ متصلة في } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\text{لدينا : } \forall x \in \mathbb{R}_+^* : xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} xg(2x)$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in [1; 2] \quad \text{نعتبر :}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim u_n = \int_1^2 f(x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [\ln x]_1^2$$

$$\boxed{\lim u_n = \ln 2}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \quad - 2$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \in [1; 2] \quad \text{نعتبر :}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim u_n = \int_1^2 f(x) dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [2\sqrt{x}]_1^2$$

$$\boxed{\lim u_n = 2(\sqrt{2}-1)}$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \quad -3$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \text{حساب هـ -}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} xg(2x) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(e^x - 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{فإن :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(2x) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{بما أن :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty} \quad \text{فإن :}$$

تمرين 15

احسب $\lim u_n$ في كل حالة

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad -1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \quad -2$$

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \quad -3$$

$$u_n = n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad -4$$

الحل

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad -1$$

نعتبر : $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [0;1]$

إذن : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

ومنه : $\lim u_n = \int_0^1 f(x) dx$
 $= [\arctan x]_0^1$

$\lim u_n = \frac{\pi}{4}$

$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}$ -4

$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

نعتبر : $f(x) = \ln(1+x) \quad x \in [0;1]$

إذن : $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\lim \ln u_n = \int_0^1 f(x) dx$

$= \int_0^1 \ln(1+x) dx$ ومنه :

$= [(1+x) \ln(1+x) - x]_0^1$

$\lim \ln u_n = 2 \ln 2 - 1$

بما أن : e^x متصلة على $2 \ln 2 - 1$

فإن : $\lim e^{\ln u_n} = e^{2 \ln 2 - 1}$

ومنه : $\lim u_n = \frac{4}{e}$