

التمرين الأول

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{و} \quad s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k} \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{نضع } \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

(1) أحسب التكامل I_0

$$(2) \text{ بين أن } I_{n+1} + I_n = \frac{1}{1+n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{و أن } I_n = (-1)^n (I_0 + s_n)$$

$$(3) \text{ بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \quad \text{و استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

التمرين الثاني

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt \quad \text{نضع } \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

(1) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب I_1

$$(2) \text{ بين أن } I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(3) \text{ استنتج أن } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} + I_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(4) \text{ بين أن } 0 \leq I_n \leq \frac{K}{2^n n!} \quad (\exists K \in \mathbb{R}) \quad \text{و استنتج نهاية المتتالية } U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k k!}$$

التمرين الثالث

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \ln(n+k) \right) - \ln(n) \quad \text{نضع } \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

$$(1) \text{ بين أن } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$(2) \quad \text{أ- أن من أجل } 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{بين أن } \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k+1}{n} \right)$$

$$\text{أ- استنتج أن : } u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq u_n$$

$$\text{ب- استنتج تأطير } u_n \text{ ثم حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين الرابع

$$(1) \text{ أحسب التكامل } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad \left(t = \frac{1}{x} \text{ ضع} \right)$$

$$(2) \text{ باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب } J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(3) \text{ حدد نهاية المتتالية } U_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{يمكن دراسة المتتالية } V_n = \ln U_n)$$

التمرين الخامس

$$(1) \text{ حدد نهاية المتتاليات التالية : } U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k} \quad (2) U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k} \quad (3) U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} k e^{\frac{k}{n}}$$