

حساب التكامل

أحسب التكاملات التالية :

1

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1} dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3} dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}} dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2} dx$

باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد التكاملات التالية

2

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x} dx$	$J_2 = \int_0^1 x \ln(2x+1) dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3) \cos x dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2+1} dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x dx$

باستعمال مكاملة بتغيير المتغير أحسب ما يلي :

3

$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}} dt$ ضع $x = 1+e^t$	$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}} dx$ ضع $t = \sqrt{x-1}$	$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} dx$ ضع $t = \sqrt{x^2+1}$
$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ضع $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$	$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ضع $t = \sqrt{x^2-1}$	$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$ ضع $t = \sqrt{e^x-1}$

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a, b]$ وبحيث $f(a+b-x) = f(x)$ ($\forall x \in [a, b]$)

4

(1) بين أن $\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

(2) استنتج قيمة $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

5

بين ما يلي : $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ، $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx \leq 1$ ، $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن $\frac{1}{1+\pi^2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \frac{4}{4+\pi^2}$

6

ضع $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ لكل عدد طبيعي n

(1) أحسب J_0 ، I_0

(2) بين أن $I_n + nJ_n = 1$ و $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ ثم استنتج I_n ، J_n

حساب التكامل

7

نعتبر التكاملات التالية :

$$L = \int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{(x^2+4x+5)^2} dx \quad \text{و} \quad K = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{و} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

(1) أحسب I

(2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $2J = I + \frac{1}{2}$ ثم استنتج J

(3) أ- بين أن $-K = -I + 2J$ ثم أحسب K

ب- بوضع $t = \arctan x$ أحسب مرة أخرى K

(4) أحسب التكامل L (ضع $t = x + 2$)

8

$$I_0 = \int_1^e x dx \quad \text{و} \quad I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx \quad \text{نضع } \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

(1) أحسب التكاملين I_1 , I_0

(2) أ- بين أن $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- استنتج I_2

(3) أ- بين أن $I_{n+1} \leq I_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- استنتج أن $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم حدد نهاية I_n ونهاية nI_n

9

(1) لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

أ- أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$

ب- استنتج حساب التكامل $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$(2) \text{ نعتبر التكاملين } B = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad \text{و} \quad C = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

أ- باستعمال مكاملة بأجزاء عبر عن B بدلالة C

ب- أثبت أن $A + C = B$

ج- استنتج حساب B ; C

10

أحسب نهاية كل من المتتاليات التالية :

$$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k} \quad (3)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k^2} \quad (2)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + nk}} \quad (1)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n(2n-k)}} \quad (6)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sqrt[3]{2^k}}{n} \quad (5)$$

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$U_n = \frac{1}{(n+1)^4} \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad (9)$$

$$U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \quad (8)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k} \quad (7)$$